Inhalt

1. Definition einer Potenz

Definition: Eine Potenz a^n ist eine abkürzende Schreibweise für ein Produkt mit gleichen Faktoren:

$$a^n = \underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet \ldots\ldots\ldots \bullet a \bullet a \bullet a}_{n\text{ - mal}}$$

Sonderfälle $a^1 = a$ und $a^0 = 1$

Beachte 0^0 ist nicht definiert (vergl. Division durch 0)

Beispiele: $5 \bullet 5 \bullet 5 = 5^3$ | $7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7 = 7^5$

Die hochgestellte "5" gibt also an, dass die Zahl 7 fünfmal mit sich selbst multipliziert werden soll.

2.1. Reihenfolge beim Rechnen

Nach wie vor gilt die Regel: **Punkt - geht vor Strichrechnung**

$5 + 3 \cdot 7 = 5 + 21 = 28$

Diese wird jetzt erweitert: **"Potenzieren" geht vor "Multiplizieren"**

$5 \bullet 3^2 = 5 \bullet 9 = 54$

2.2. Potenzen mit negativer Basis

Ist die Basis negativ, so unterscheidet man zwei Fälle:

- Der Exponent ist gerade $\Rightarrow$ der Potenzwert ist positiv

  $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

- Der Exponent ist ungerade $\Rightarrow$ der Potenzwert ist negativ

  $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Tastenfolge am TR:

Für Quadratzahlen $\boxed{\mathbf{a}}$ $\boxed{\mathbf{x^2}}$

Für beliebige Potenzen $\boxed{\mathbf{a}}$ $\boxed{\mathbf{y^x}}$ $\boxed{\mathbf{n}}$ $\boxed{\mathbf{=}}$

2. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Basis beibehält, und die Exponenten addiert:

$$a^x \bullet a^y = \underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet \ldots\ldots\ldots}_{x\text{ - mal}}\ \underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet \bullet a \bullet a \bullet a}_{y\text{ - mal}} = a^{x+y}$$

Beispiele:

$3^3 \bullet 3^2$	=	$3 \bullet 3 \bullet 3$	$\bullet\, 3 \bullet 3$	=	3^5
$10^2 \bullet 10^5$	=	$10 \bullet 10$	$\bullet\, 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10$	=	10^7
$a^5 \bullet a^6$	=	$a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a$	$\bullet\, a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a$	=	a^{11}

$$\boxed{a^n \bullet a^m = a^{n+m}}$$

3. Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponent

Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man den Exponenten beibehält, und die Basen multipliziert:

$$a^x \bullet b^x = \underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet \ldots\ldots\ldots}_{x\text{ - mal}}\ \underbrace{b \bullet b \bullet b}_{x\text{ - mal}} = (ab)^x$$

Beispiele:

$3^3 \bullet 4^3$	=	$3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 4 \bullet 4 \bullet 4$	=	12^3	=	1728
$2^5 \bullet 10^5$	=	$2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10$	=	20^5	=	3200000
$a^3 \bullet b^3$	=	$a \bullet a \bullet a \bullet b \bullet b \bullet b$	=	$(ab)^3$		

$$\boxed{a^n \bullet b^n = (ab)^n}$$

4. Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis beibehält

$$(a^x)^y = \underbrace{a^x \bullet a^x \bullet a^x \bullet \ldots a^x \bullet a^x}_{y\text{ - mal}} = a^{\overbrace{x+x+\ldots+x}^{y\text{ Summanden}}} = a^{x \cdot y}$$

$(3^3)^2$	=	$3^3 \bullet 3^3$	$=3^{3+3}$	$= 3^{3 \cdot 2}$	$= 3^6$
$(2^n)^3$	=	$2^n \bullet 2^n \bullet 2^n$	$=2^{n+n+n}$	$= 2^{n \cdot 3}$	$= 2^{3n}$
$(a^n)^4$	=	$a^n \bullet a^n \bullet a^n \bullet a^n$	$= a^{n+n+n+n}$	$= a^{n \cdot 4}$	$= a^{4n}$
$(a^n)^x$	=	$a^n \bullet a^n \bullet \ldots \bullet a^n \bullet a^n$	$= a^{n+n+\ldots+n}$	$= a^{n \cdot x}$	$= a^{nx}$

5. Division von Potenzen mit gleicher Basis

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Basis beibehält, und die Exponenten subtrahiert:

$$a^x : a^y = \frac{a^x}{a^y} = \frac{\overbrace{a \bullet a \bullet a \ldots\ldots\ldots \bullet a \bullet a}^{x\text{ - mal}}}{\underbrace{a \bullet a \bullet \ldots\ldots\ldots \bullet a}_{y\text{ - mal}}} = a^{x-y}$$

Beispiele:

$$\frac{3^5}{3^3} = \frac{3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3}{3 \bullet 3 \bullet 3} = 3^2$$

$$\frac{5^7}{5^5} = \frac{5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5}{5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5} = 5^2$$

$$\frac{a^7}{a^2} = \frac{a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a}{a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a} = a^5$$

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

6. Division von Potenzen mit gleichem Exponent

Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man den Exponenten beibehält, und die Basen dividiert:

$$\frac{3^3}{4^3} = \frac{3 \bullet 3 \bullet 3}{4 \bullet 4 \bullet 4} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$\frac{6^4}{2^4} = \frac{6 \bullet 6 \bullet 6 \bullet 6}{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2} = \left(\frac{6}{2}\right)^4 = 3^4$$

$$\frac{a^5}{b^5} = \frac{a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a}{b \bullet b \bullet b \bullet b \bullet b} = \left(\frac{a}{b}\right)^5$$

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

7. Potenzen mit negativem Exponenten

Das Gesetz über die Division von Potenzen mit gleicher Basis führt zu folgenden Fällen:

a. Die Hochzahl des Dividend ist größer als die des Divisors

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2}{2 \bullet 2 \bullet 2} = 2^{5-3} = 2^{2}$$

$$\frac{2^5}{2^4} = \frac{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2}{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2} = 2^{5-4} = 2^{1}$$

b. Die Hochzahl des Dividend ist genau so groß wie die des Divisors

$\Rightarrow$ die Hochzahl wird 0

$$\frac{2^5}{2^5} = \frac{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2}{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2} = 2^{5-5} = 2^{0} = 1$$

$$\boxed{\text{Sonderfall } a^{0} = 1}$$

c. Die Hochzahl des Dividend ist kleiner als die des Divisors

$\Rightarrow$ die Hochzahl wird negativ

$$\frac{2^5}{2^6} = 2^{5-6} = 2^{-1} = \frac{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2}{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2} = \frac{1}{2^1}$$

$$\frac{2^5}{2^7} = 2^{5-7} = 2^{-2} = \frac{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2}{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2} = \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{a^5}{a^7} = a^{5-7} = a^{-2} = \frac{a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a}{a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a} = \frac{1}{a^2}$$

Vorzeichen der Hochzahl

Kehrwert

Eine Potenz mit negativen Exponenten ist gleich dem Kehrwert der Potenz mit positiven Exponenten.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

8. Darstellungsmöglichkeiten sehr großer / kleiner Zahlen

Sehr große und sehr kleine Zahlen werden in der wissenschaftlichen Schreibweise als Produkte der Form $a \cdot 10^n$ bzw. $a \cdot 10^{-n}$ dargestellt. Dabei ist a eine Dezimalzahl mit genau einer Ziffer vor dem Komma.
Ist n ein Vielfaches von 3 erhalten die Maßeinheiten besondere Vorsilben.

Zahlwort	Zahl	10-er - Potenz	Vorsilbe
1 Trillion m	1000000000000000000 m	10^{18} m	1 **Exa**meter
1 Billiarde m	1000000000000000 m	10^{15} m	1 **Peta**meter
1 Billion m	1000000000000 m	10^{12} m	1 **Tera**meter
1 Milliarde m	1000000000 m	10^{9} m	1 **Giga**meter
1 Million m	1000000 m	10^{6} m	1 **Mega**meter
1 Tausend m	1000 m	10^{3} m	1 **Kilo**meter
1 Meter	**1 m**	$\mathbf{10^{0}}$ **m**	**1 Meter**
1 Tausendstel m	0,001 m	10^{-3} m	1 **Milli**meter
1 Millionstel m	0,000001 m	10^{-6} m	1 **Mikro**meter
1 Milliardstel m	0,000000001 m	10^{-9} m	1 **Nano**meter
1 Billionstel m	0,000000000001 m	10^{-12} m	1 **Pico**meter
1 Billiardstel m	0,000000000000001 m	10^{-15} m	1 **Femto**meter
1 Trillionstel m	0,000000000000000001 m	10^{-18} m	1 **Atto**meter

Beispiele:

- Der Abstand der Sonne zur Erde beträgt ca.
  150 Millionen Kilometer = 150 Gigameter
  150000000 km = 150000000000 m = $150 \cdot 10^9$ m = $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m

- Ein Atom hat einen Durchmesser von 0,1 Nanometer

  $0{,}1 \cdot 10^{-9}$ m = 10^{-10} m = $\frac{1}{10000000000}$ m