Einführung in die Kombinatorik

Die folgenden Kapitel sind im Rahmen einer Arbeitsgemeinschaft für besonders befähigte Schülerinnen und Schüler im Fach Mathematik (Jahrgangsstufe 8/9) am Clara-Schumann-Gymnasium in Lahr/Schwarzwald entstanden.

Meiner Meinung nach eignen sich die Themen bis einschließlich Kapitel 5 sowie Kapitel 6.3 und 6.4 auch für Schülerreferate.

Ich danke Frau Dr. Anja Kohl von der TU Freiberg für ihre freundliche und fachkundige Unterstützung bei den Lösungen zu den Kapiteln 8 und 9.

Lahr, Mai 2007

(überarbeitet, Juli 2011 – Danke an Dr. H. Plotke)

Andreas Brinken
Geroldsecker Vorstadt 129
77933 Lahr
E-Mail: brinken@csg-lahr.de

Inhaltsverzeichnis

1. Was ist „Kombinatorik“

Kombinatorik ist ein interessantes Teilgebiet der Mathematik und beschäftigt sich mit der Berechnung von Anzahlen. Mit wenigen Kenntnissen ist man in der Lage, auf den ersten Blick völlig undurchschaubare Fragestellungen zu lösen.

In vielen Fällen lassen sich mit kombinatorischen Kenntnissen auch Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen bestimmter Ereignisse berechnen. →Vgl. Kap. 5.3.

1.1. Aufgabenbeispiele

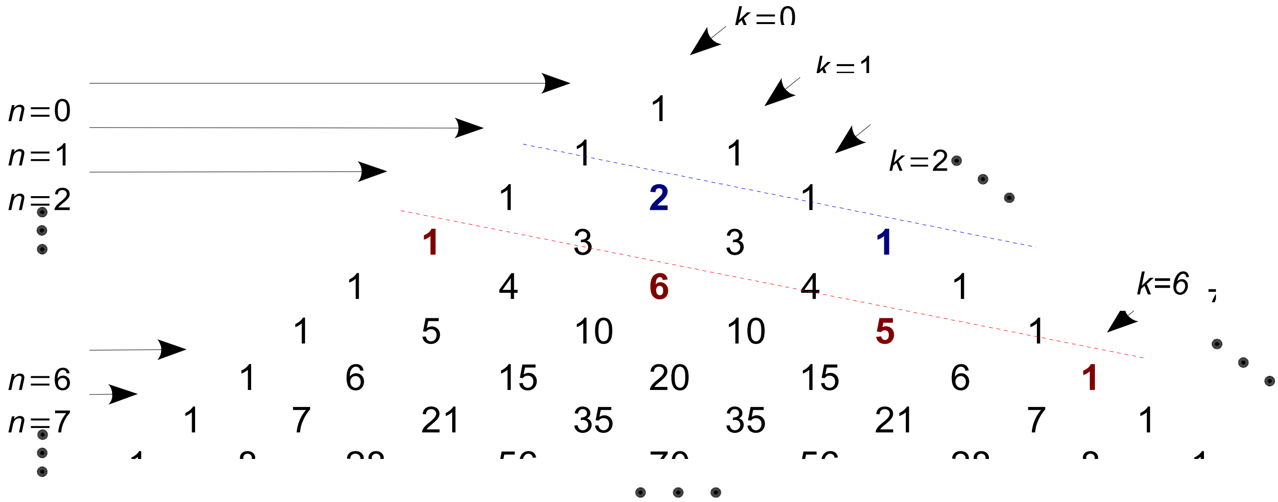
1.) Lotto „6 aus 49“:
   a) Wie viele Tipp-Möglichkeiten gibt es insgesamt? → Vgl. Kap. 4.1.2
   b) Wie viele Möglichkeiten gibt es für 5 Richtige? → Vgl. Kap. 5.4

2.) In einer Schachtel liegen n Stäbchen. Das k-te Stäbchen sei k Längeneinheiten lang. Nun werden zufällig drei dieser Stäbchen ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man damit ein Dreieck bilden? → Vgl. Kap. 7

3.) Auf einer Kreislinie liegen n Punkte. Alle Punkte werden paarweise miteinander verbunden. Bestimme die maximale Anzahl der Flächen, in die dadurch der Kreis zerfällt. → Vgl. Kap. 8

4.) Es werden acht Türme auf ein Schachbrett gesetzt. → Vgl. Kap. 9
   a) Auf wie viele verschiedene Arten kann man die Türme auf den 64 Feldern platzieren, so dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen?
   b) Wie groß ist die Anzahl der drehsymmetrischen Möglichkeiten?
   c) Wie groß ist die Anzahl der achsensymmetrischen Möglichkeiten?

2. Das Pascalsche Dreieck



Die obige Zahlenanordnung wird nach dem französischen Gelehrten Blaise Pascal (* 1623 - † 1662) „***Pascalsches Dreieck***“ genannt.

Der „Aufbau“ beginnt in Zeile 0 ($n=0$) mit einer Eins. Am Rand jeder neuen Zeile steht auf beiden Seiten eine weitere 1. Alle anderen Einträge entstehen aus der Summe der beiden darüber liegenden Zahlen:

Zunächst scheint es ein einfaches Zahlenspiel zu sein, doch der Inhalt steckt voller schöner Mathematik. So haben die Zahlen im Pascalschen Dreieck neben der Symmetrie viele weitere interessante Eigenschaften:

a) Die zweite Zahl entspricht immer der „Zeilennummer *n*“. Man beginnt bei der Nummerierung mit der „nullten Zeile“.

b) Die vorletzte Zahl in jeder Zeile entspricht immer der „Diagonalen-nummer *k*“. Wieder beginnt man beim Zählen mit der „nullten Diagonalen“.

c) Die Summe aller Zahlen der *n*-ten Zeile ergibt stets die 2-er-Potenz 2^n.

d) Die zweite „Diagonale“ ($k=2$, Achtung man beginnt bei der Nummerierung mit 0) enthält die „Dreieckszahlen“ (Summen der darüber liegenden ersten aufeinander folgenden natürlichen Zahlen): $1;3,6,10,15;\ldots$, denn $1+2=3$, $1+2+3=6$ usw. (vgl. Kap. 6.3)

e) In der dritten Diagonalen ($k=3$) liegen die Summen der darüber liegenden Dreieckszahlen $(10=1+3+6;20=1+3+6+10;\ldots)$.

f) Allgemein beinhaltet jeder Eintrag die Summe der darüber liegenden Diagonaleneinträge.

g) Die Zahlen in der n-ten Zeile entsprechen stets den Koeffizienten (=Zahlfaktoren) der „***Binome***“ $(a\pm b)^n$. (Sie werden daher auch ***Binomialkoeffizienten*** genannt.)

Beispiel: $(a-b)^2=(\mathbf{1}\cdot)a^2-\mathbf{2}\cdot ab+(\mathbf{1}\cdot)b^2$
$(a+b)^3=a^3+\mathbf{3}a^2b+\mathbf{3}ab^2+b^3$
$(a-b)^5=a^5-\mathbf{5}a^4b+\mathbf{10}a^3b^2-\mathbf{10}a^2b^3+\mathbf{5}ab^4-b^5$

h) Nummeriert man auch jeden. Eintrag einer Zeile beginnend mit 0, dann hat der *k*-te Eintrag in der *n*-ten Zeile eine kombinatorische Bedeutung:

Dies ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Gruppe von *n* Elementen genau *k* Elemente ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen. Vergleiche mit Kapitel 4.1.2.

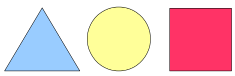
i) Etwas „versteckt“ liegen die nach *Leonardo da Pisa* (auch *Fibonacci,* * 1180 (?) - † 1241(?)) benannten ***„Fibonacci-Zahlen“*** $1;1;2=1+1;3=1+2;5=2+3;8;13;21;34;\ldots$ Die Summe der Einträge in den „flachen Diagonalen“ ergibt jeweils eine Fibonacci-Zahl . Als Beispiel sind im obigen Dreieck die zweite, die vierte und die siebte „Flachdiagonale“ blau bzw. rot gekennzeichnet: $3=F_4$ bzw. $13=F_7$

j) Addiert man zwei unter einander stehende Zahlen der zweiten Diagonalen, so ergibt sich stets eine Quadratzahl. (Vgl. Kap. 6.3.3)

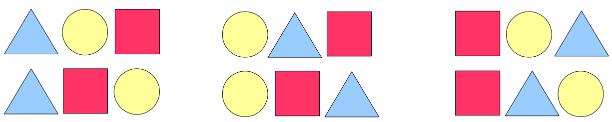
3. Permutationen und Fakultät

Permutation ist die *„Veränderung einer Anordnung“*.

Wir wählen uns drei verschiedene Formen. Diese können wir umlegen (***permutieren***), so dass sich die Reihenfolge ändert.



Bei zwei Formen gibt es zwei Möglichkeiten der Anordnung. Bei Hinzunahme der dritten Form kann jede der drei Formen an erster Stelle stehen und mit den zwei anderen auf je 2 Arten „kombiniert“ werden. Somit sieht man sofort, dass bei einer Gruppe von 3 Elementen $3\cdot 2=6$ Permutationen existieren.



Nimmt man ein viertes Element hinzu, so kann man jedes dieser vier Elemente wiederum mit den anderen drei auf 6 Arten kombinieren. Dies liefert $4\cdot 6=4\cdot 3\cdot 2(\cdot 1)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$ verschiedene Permutationen.

Allgemein gibt es damit für eine Gruppe aus *n* Elementen genau $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n=n!$ Permutationen.

Das Ausrufezeichen hinter dem *n* heißt „***Fakultät***“ (sprich: *„n Fakultät“*).

4. Stichproben aus einer *n*-elementigen Menge

Beim „unserem" Lotto zieht man (ohne Zusatzzahl) 6 Kugeln aus 49. Der Mathematiker spricht hier von einer „***Stichprobe vom Umfang 6***".

Beim Lotto ist die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen wurden, gleichgültig – die Zahlen werden am Ende immer der Größe nach geordnet. Somit gibt es für jeden Tipp $6!$ Möglichkeiten, dass dieser tatsächlich gezogen wird. Aber wie viele Tippmöglichkeiten gibt es insgesamt?

Im Folgenden untersuchen wir vier Möglichkeiten, Stichproben aus einer *n*-elementigen Menge zu entnehmen.

4.1. Ziehen ohne Zurücklegen

4.1.1. Ziehung ohne Zurücklegen *mit* Beachtung der Reihenfolge

Zur Bestimmung aller Tippmöglichkeiten beim Lotto nehmen wir zunächst an, die Reihenfolge der Kugelziehung spiele für das Ergebnis eine Rolle. Damit wären die Ziehungen (1,10,25,34,36,43) und (25,34,10,43,1,36) verschieden.

- Bei der ersten Ziehung sind noch alle 49 Kugeln in der Urne. Es gibt daher für die erste Zahl genau 49 Möglichkeiten.
  → Zwischenergebnis 49 Möglichkeiten für „1 aus 49"
- Bei der zweiten Ziehung sind nur noch 48 Kugeln in der Urne. Zu jeder der 49 Möglichkeiten für die erste Zahl kann man somit 48 Möglichkeiten für die 2. Zahl kombinieren.
  → Zwischenergebnis $49 \cdot 48$ Möglichkeiten für „2 aus 49"
- Da zu jeder dieser $49 \cdot 48$ Möglichkeiten mit der 3. Kugel weitere 47 neue Möglichkeiten hinzu kommen, erhält man als neues
  → Zwischenergebnis $49 \cdot 48 \cdot 47$ Möglichkeiten für „3 aus 49"
- Schließlich sind es bei „6 aus 49 – mit Beachtung der Reihenfolge" genau $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten der Ziehung.

Hinweise

- Durch Kürzen der ersten 43 Faktoren aus $49!$ kann man das obige Produkt berechnen. Die Zahl 43 hängt direkt mit der Gesamtzahl der Kugeln und der Anzahl der gezogenen Kugeln zusammen $(43 = 49 - 6)$.

→ $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = \frac{49!}{(49-6)!}$ Möglichkeiten der Ziehung „mit Reihenfolge"

- Große Fakultäten „sprengen" die Rechenkapazität eines Taschenrechners (ab ca. $70!$).
- Mit einem wissenschaftlichen Taschenrechner erhält man die Zahl zum obigen Ergebnis über die ***nPr***-Taste. (Eingabe: 49 *nPr* 6 =) Hiermit spart man sich Tipparbeit.

Verallgemeinerung:

Zieht man aus einer Urne mit n Kugeln insgesamt k Kugeln und beachtet die Reihenfolge der Ziehung, so gibt es hierfür genau

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$ Möglichkeiten.

4.1.2. Ziehung ohne Zurücklegen *ohne* Beachtung der Reihenfolge

Wir haben beim Lotto gesehen, dass jeweils $6!$ Ziehungen zum gleichen Tipp führen. Damit kann man die $49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44$ Möglichkeiten zu „Paketen der Größe $6!$ packen".

→ Es ergeben sich $\frac{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}{6!}$ verschiedene Tippmöglichkeiten.

Hinweise

- Mit einem wissenschaftlichen Taschenrechner erhält man die Zahl zum obigen Ergebnis über die ***nCr***-Taste. (Eingabe: 49 *nCr* 6 =)
- Im Pascalschen Dreieck findet man die Zahl in der 49. Zeile an der 6. Stelle (jeweils beginnend mit 0).
- Statt $\frac{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}{6!}$ kann man kurz $\binom{49}{6}$ schreiben (sprich: „49 *über* 6"). Eine solche Zahl heißt „***Binomialkoeffizient***" (vgl. Kap. 2).

Verallgemeinerung:

Zieht man aus einer Urne mit n Kugeln insgesamt k Kugeln **ohne Beachtung der Reihenfolge**, so gibt es hierfür genau

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}$$ Möglichkeiten.

4.2. Ziehen mit Zurücklegen

4.2.1. Ziehung mit Zurücklegen *mit* Beachtung der Reihenfolge

Beispiel:

Ein 5-stelliges Zahlenschloss. Wie viele verschiedene Zahlenkombinationen existieren, wenn an jeder Stelle sieben verschiedene Ziffern eingestellt werden können?

Auch hier können wir das Beispiel abstrahieren und uns eine Urne mit sieben verschiedenen Kugeln denken. Mit dem Ziehen der ersten Kugel wählen wir die Ziffer für die erste Stelle des Schlosses. Hierfür gibt es genau 7 Möglichkeiten. Wir notieren das Ergebnis, legen die Kugel zurück und ziehen die nächste. Wieder gibt es 7 Möglichkeiten. Kombiniert mit der ersten

Ziehung sind es für die ersten beiden Ziffern $7 \cdot 7 = 49$ Möglichkeiten. Nachdem wir fünf Mal eine aus sieben Kugeln gezogen haben, erhalten wir eine von $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$ verschiedenen Kombinationen.

Verallgemeinerung:

Zieht man aus einer Urne mit *n* Kugeln *k* mal eine Kugel **mit Zurücklegen**, so gibt es hierfür **mit Beachtung der Reihenfolge** genau

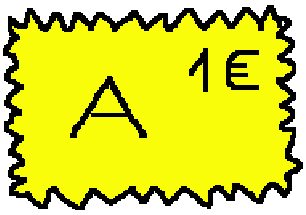
n^k Möglichkeiten.

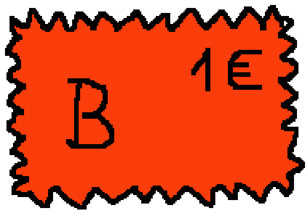
4.2.2. Ziehung mit Zurücklegen *ohne* Beachtung der Reihenfolge

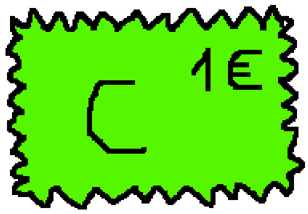
Zu dieser Variante gibt es verhältnismäßig wenige Beispiele. Nicht desto trotz finde ich die im folgenden beschriebene Vorgehensweise mathematisch einfach schön.

Beispiel:

Aus drei verschiedenen Briefmarkenserien mit € 1,00-Marken sollen alle Möglichkeiten zusammengestellt werden, mit denen man einen 5 €-Brief frankieren kann, wobei die Reihenfolge der Marken keine Rolle spielt.







Da die Reihenfolge keine Rolle spielt, sind die beispielsweise die Frankierungen AAABC und ACABA für uns gleichwertig. Wir sortieren daher aus Gründen der Übersichtlichkeit nach dem Alphabet.

Jetzt kommt ein toller Trick: Wenn wir von einer Sorte auf eine andere wechseln, markieren wir dies mit einem Bindestrich. Wenn eine Markensorte ganz fehlt, machen wir dies ebenfalls mit einem Strich deutlich.

Beispiele: AA–B–CC; –BB–CCC; AAAAA––; –BBBBB–

Wir benötigen somit 7 „Plätze“. Von diesen 7 Plätzen wählen wir immer zwei für unsere Bindestriche aus. Interessanterweise ist mit der Wahl der Plätze für die Bindestriche die Frankierung bereits eindeutig (bis auf die uninteressante Reihenfolge) festgelegt.

Nach 4.1.2 ist die Wahl von 2 aus 7 Plätzen auf $\binom{7}{2} = 21$ („sieben über 2“) Arten möglich. (Taschenrechner: 7 *nCr* 2 =) → Vergleiche auch den zweiten Eintrag der siebten Zeile im Pascalschen Dreieck auf Seite 9.

Wir benötigen also bei einer Urne mit *n* Elementen bei *k*-maligem Ziehen mit Zurücklegen $k + n - 1$ Plätze, von denen wir $n - 1$ mit Trennstrichen belegen.

Verallgemeinerung:

Wir benötigen also bei einer Urne mit *n* Elementen bei *k*-maligem Ziehen **mit Zurücklegen** und **ohne Beachtung der Reihenfolge** $n+k-1$ Plätze, von denen wir $n-1$ mit Trennstrichen belegen. Dies ist auf genau

$\binom{n+k-1}{n-1}$ Arten möglich.

5. Wege im Gitter

5.1. Das „*n* x *m* Gitter“

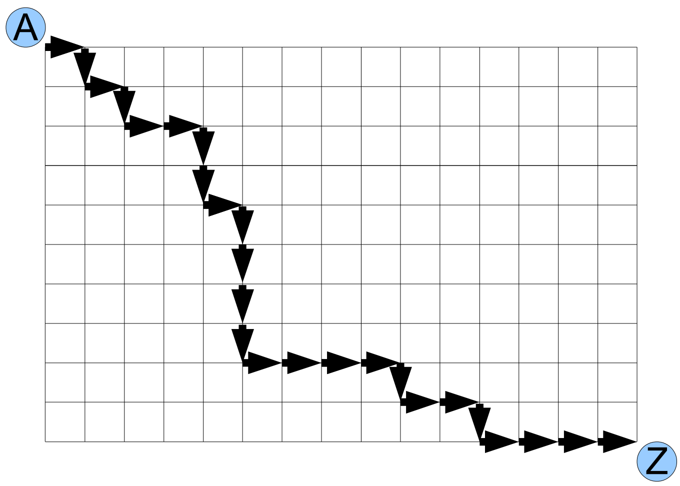
Im nachfolgenden „***n* x *m* Gitter**“ gibt es verschiedene Wege von A nach Z.

5.1.1. Vereinbarungen

- Wege im Gitter beginnen immer oben links.
- Im Gitter kann man sich nur auf zwei Arten bewegen: ein Weg kann entweder einen Schritt nach links oder einen Schritt nach unten verlaufen. Alles andere ist verboten.

Hinweis

Um im *n* x *m* Gitter von links oben nach rechts unten zu gelangen, werden aus der Gesamtzahl der Schritte genau *n* Schritte ausgewählt. Die Reihenfolge der Auswahl spielt keine Rolle (man muss die Schritte ja in jedem Fall nacheinander gehen). Dieses Problem ist somit bekannt: wir bilden eine Stichprobe durch Ziehen (von Wegen nach unten) ohne Zurücklegen aus einer Menge (alle Wege) ohne Beachtung der Reihenfolge (vgl. Kap. 4.1.2).



5.1.2. Aufgabe

Wie viele verschieden Wege gibt es, um von A nach Z gelangen?

Lösung

Man kann sich leicht vergewissern, dass in jedem Fall $15+10=25$ „Schritte“ von A nach Z zu gehen sind. Davon gehen genau 10 nach unten. Im obigen Fall sind es die Schritte 2, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 18 und 21.

Nach 4.1.2 gibt es von A nach Z insg. $\binom{25}{10}=3.268.760$ verschiedene Wege!

Bemerkungen

- Beachte, dass bei einem Weg durch ein *n* x *m* Gitter immer $n+m$ Schritte notwendig sind, von denen genau *m* Schritte nach unten verlaufen.
- Im 43 x 6 Gitter entspricht die Anzahl der möglichen Wege genau der Anzahl der möglichen Tipps beim Lotto „6 aus 49“. → vgl. Kap. 5.4.
- Es ist gleichgültig, ob man von 25 Schritten 10 nach unten wählt oder 15 nach rechts. Aufgrund der Symmetrie der Binomialkoeffizienten ergeben sich gleiche Weganzahlen:

  $$\binom{25}{10}=\binom{25}{15} \text{ bzw. allgemein: } \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

  Diese Symmetrie folgt übrigens bereits aus der Schreibweise der Binomialkoeffizienten mit Fakultäten (vgl. Ende Kap. 4.1.2, Seite 9):

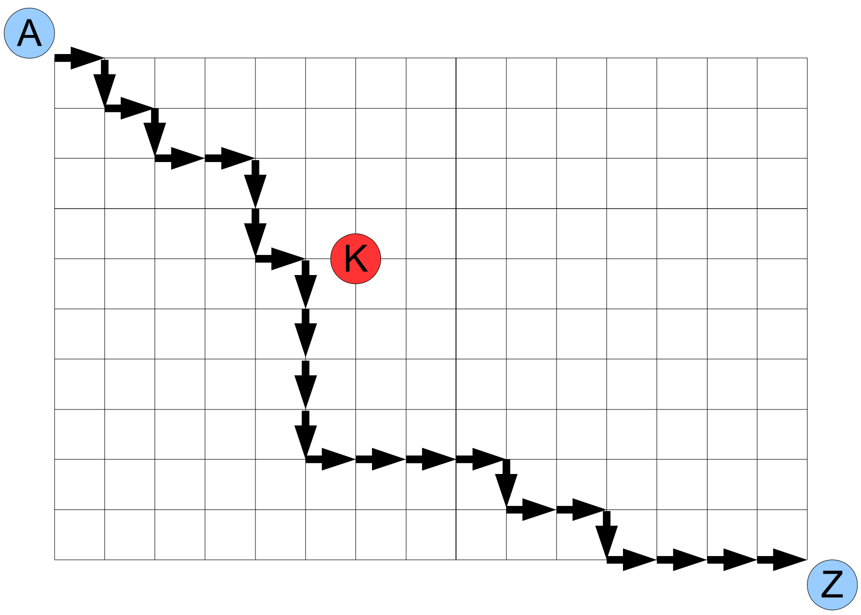
  $$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}=\binom{n}{k}$$

  (Vergleiche die Symmetrie auch mit den Einträgen im Pascalschen Dreieck auf Seite 6).

5.2. Nicht alle Wege führen nach Rom

Stellen wir uns eine Maus vor, die vom Punkt A nach Z gelangen möchte. Im Punkt K wartet eine Katze, welche die Maus frisst, wenn diese dort vorbei kommt.

Wie viele Wege von A nach Z bleiben der Maus?



Lösung:

Für die Maus führen von A aus $\binom{10}{4}=210$ Wege in den Tod (nach K).

Achtung: Jeder dieser Wege hätte auf $\binom{15}{6}=5005$ verschiedene Arten fortgesetzt werden können. Damit reduzieren sich die anfangs berechneten $\binom{25}{10}$ Wege um $\binom{10}{4}\cdot\binom{15}{6}=1.051.050$ Wege.

Der Maus verbleiben somit noch 2.217.710 „günstige“ Wege, genau genommen nur $\frac{2217710}{3268760} \approx 0{,}678 = 67{,}8\,\%$ von allen Wegen. Das ist wie ich finde überraschend wenig.

5.3. Zshg. Kombinatorik – Wahrscheinlichkeitsrechnung

In der ***Wahrscheinlichkeitsrechnung*** fasst man einen Weg im Gitter als „***Ausgang eines Zufallsexperiments***“ auf.

Wahrscheinlichkeiten sind stets Zahlen zwischen 0 und 1. Sie werden oft mit dem Großbuchstaben ***P*** bezeichnet und werden oft in Prozent angegeben.

Da im Beispiel von Kap. 5.2. alle Wege gleich wahrscheinlich sind, nennt man den Bruch:

$$\frac{\text{Anzahl der } \textit{günstigen} \text{ Wege}}{\text{Anzahl } \textit{aller möglichen} \text{ Wege}}$$

„***Wahrscheinlichkeit für den „günstigen“ Ausgang des Experiments***“.

In der Mathematik bezeichnet man den Ausgang „*Maus überlebt*“ auch als „***Ereignis***“. Das Ereignis „*Maus überlebt*“ tritt somit mit der Wahrscheinlichkeit $P(\textit{Maus überlebt}) \approx 67{,}8\,\%$ ein.

Das „***Gegenereignis“*** hierzu heißt: „*Maus tot*“. Für dieses (tödliche) Ereignis sind $3268760 - 2217710$ Wege „günstig“.

$$\rightarrow \frac{3268760 - 2217710}{3268760} = 1 - \frac{2217710}{3268760} \approx 1 - 0{,}678 = 32{,}2\,\% = P(\textit{Maus tot})).$$

5.3.1. Das „Geburtstagsproblem“

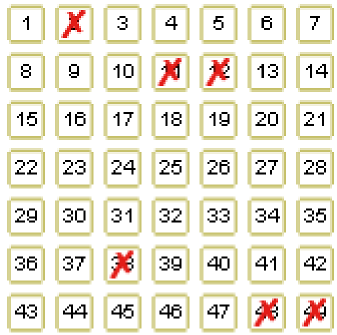
Aufgabe: *Wie wahrscheinlich ist es, dass in einer zufällig zusammen gesetzten Gruppe von 20 (30 oder allgemein n) Personen mindestens zwei Gruppenmitglieder am gleichen Tag Geburtstag haben.*
(Wir gehen vereinfachend davon aus, dass sich keine Zwillinge oder gar Drillinge in der Gruppe befinden und niemand der Gruppe in einem Schaltjahr am 29. Februar geboren wurde.)

Das obige Ereignis trifft nicht nur zu, wenn genau zwei Mitglieder am gleichen Tag Geburtstag haben, sondern auch wenn sogar 3, 4 oder im (unwahrscheinlichen) Extremfall alle Gruppenmitglieder am gleichen Tag Geburtstag haben. Die Gesamtwahrscheinlichkeit setzt sich somit aus vielen Teilwahrscheinlichkeiten zusammen. Es ist in diesem Fall wieder ratsam, die Lösung über das Gegenereignis zu berechnen (Alle Gruppenmitglieder haben an verschiedenen Tagen Geburtstag.)

Lösungen hierzu finden Sie zu genüge im Internet (z. B. http://www.mathe-matik.ch/anwendungenmath/wkeit/geburtstag/)

Überraschend ist nicht nur für den Laien, dass bereits ab einer Gruppenstärke von 23 Personen, die Wahrscheinlichkeit für „gemeinsame Geburtstage“ über 50% liegt. Sind es gar 50 Personen, steigt die Wahrscheinlichkeit auf über 97% (!).

5.4. Das „Lotto-Gitter“



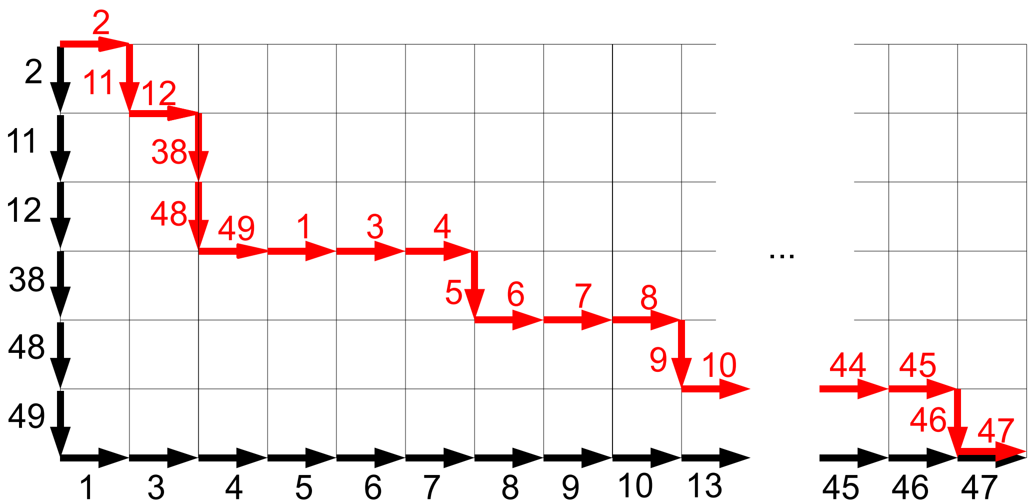
Beim Ausfüllen eines Lotto-Scheins, wählt man beim Spiel „6 aus 49“ pro Tipp mit Kreuzen genau 6 Zahlen aus 49 aus. (Wie bereits in Kapitel 4 vernachlässigen wir wieder die Zusatzzahl.)

Vereinbarungen

- Die 6 „getippten“ Zahlen seien die ersten 6 Wege in einem „43 x 6 Gitter“.
- „*Getippt*“ entspricht einem Schritt „nach unten“. „*Nicht getippt*“ bedeutet Schritt „*nach rechts*“.

Damit gehen wir bei einem eigenen Tipp (oben links beginnend) immer die ersten 6 Schritte nach unten und die restlichen 43 Schritte nach rechts. (siehe unten → schwarzer Weg)

5.4.1. Beispiel



Wir spielen jetzt Lotto und geben den auf Seite 14 abgebildeten Tippschein ab. Anschließend ordnen wir in einem 43 x 6 Gitter den ersten 6 Wegen nach unten „unsere“ Zahlen 2, 11, 12, 38, 48 und 49 zu. Die verbleibenden Zahlen ergeben die restlichen 43 Wege nach rechts. So ergibt sich der schwarze Weg im Gitter.

Nehmen wir an, bei der anschließenden Ziehung würden die Zahlen 5, 9, 11, 38; 46 und 48 gezogen.

Zunächst kontrollieren wir, ob „unsere“ Zahlen gezogen wurden, erst danach folgen die Schritte für die übrigen Zahlen. Der rote Weg im Gitter entspricht „unserer“ Ziehung.

Der erster Schritt zeigt an, dass die „2“ nicht gezogen wurde, denn er führt nach rechts. Der zweite Schritt entspricht der Zahl „11“. Diese wurde gezogen, d. h. wir wandern den zweiten Schritt nach unten. Usw.

Auf diese Art stellen wir bereits nach 6 Schritten fest, wie viele Zahlen richtig getippt wurden.

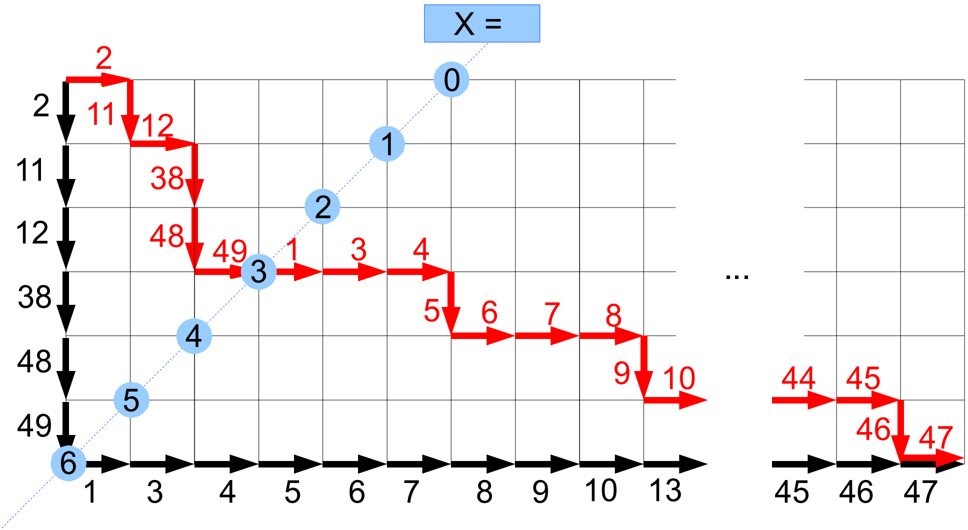
Frage

Welche zusätzlichen Erkenntnisse können wir mit diesem 43 x 6 Gitter bei Lotto gewinnen?

Zufallsvariable X

Die Darstellung der Trefferzahl im Gitter vereinfacht sich mit der so genannten ***Zufallsvariablen X.***

$X=4$ bedeutet in unserem Zusammenhang: „genau 4 Richtige".



Betrachten wir das obige Gitter etwas genauer. Man erkennt:

1. Bei jeder möglichen Ziehung landet man nach genau 6 Schritten auf der blauen Diagonalen. Hier lassen sich aus den Werten der Zufallsvariablen X die Anzahl der richtig getippten Zahlen ablesen.
2. Für z. B. 3 Richtige gibt es für einen roten Streckenzug viele Möglichkeiten. (Für 6 Richtige gibt es dagegen nur eine Variante.)

Günstige Ziehungen für „drei Richtige"

Jeder rote „Zahlenweg" durch den blauen Punkt mit $X=3$ liefert genau 3 richtige Zahlen. Die Anzahl der verschieden (roten) Wege über die Markierung 3 berechnet man nach Kap. 5.2. über den Term $\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}$.

(***Achtung:*** Es gibt nicht nur $\binom{6}{3}$ mögliche Wege ***zur*** 3, sondern auch $\binom{43}{3}$ verschiedene Wege ***von ihr weg***.)

Damit gibt es 246.820 Möglichkeiten für einen „3-er". Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt nach den Kapiteln 4.1.2 und 5.3.

$$\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}\approx 1{,}8\,\% = P(X=3).$$

Auf die gleiche Weise berechnet man die Wahrscheinlichkeiten für 0, 1, 2, ..6 Richtige. Hierbei leistet ein Tabellenkalkulationsprogramm (wie z. B. ***OpenOffice Calc***) gute Dienste. Mit solch einem Programm kann man beispielsweise in der ersten Zeile Formeln mit „*Zellenbezügen*“ eingeben, die sich beim Kopieren in die nachfolgenden Zeilen anpassen.

Trefferzahl k	„günstige Mögl.“	Möglichkeiten insg.	P(X=k)
0	6096454	13983816	43,60%
1	5775588	13983816	41,30%
2	1851150	13983816	13,24%
3	246820	13983816	1,77%
4	13545	13983816	0,097%
5	258	13983816	0,0018%
6	1	13983816	0,000007%

6. Summenzeichen Σ und Reihen

Lange Summen deren Summanden eine bestimmte Regelmäßigkeit aufweisen, bezeichnet man in der Mathematik als „***Reihen***“. Aufgrund der Regelmäßigkeiten kann man sie kurz mit dem Summenzeichen Σ (griechischer Buchstabe, sprich: „*Sigma*“) beschreiben.

6.1. Beispiele

Summe der ersten *n* natürlichen Zahlen: $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+...n$

Bei $\sum_{i=1}^{n} i$ (sprich: *„Summe von 1 bis n über i“*) „*durchläuft*“ der so genannte „***Laufindex***“ *i* allen natürlichen Zahlen von 1 bis *n*. Dazwischen stehen jeweils „+“-Zeichen. (Logisch, denn es handelt sich ja um eine Summe!)

Summe von *n* Einsen: $\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+...+1}_{\text{n Summanden}}$

Summe der ersten *n* ungeraden Zahlen: $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = 1+3+5+...+(2n-1)$

Summe der ersten *n* geraden Zahlen: $\sum_{i=1}^{n} 2i = 2+4+6+...+2n$

Summe der 10-ten bis 20-ten geraden Zahl: $\sum_{i=10}^{20} 2i = \underbrace{20+22+...+40}_{\textit{Achtung!}\ \text{Hier stehen 11 Summanden!}}$

6.2. Umformungsregeln bei Reihen

Die wichtigsten Rechenregeln bei Summen (zu denen die Reihen zählen) sind:

1. Ausklammern $(15x+5) = 5 \cdot (3x+1)$

   Bei der Reihe der ersten *n* geraden Zahlen kann man jeweils eine 2 ausklammern. → $\sum_{i=1}^{n} 2i = 2\sum_{i=1}^{n} i$
2. Positive Summanden darf man beliebig vertauschen:

   $$x+5+y=5+x+y=y+x+5=...$$

   (Nach Kap. 3 gibt es hier insgesamt $3!=6$ Möglichkeiten.)
3. Wiederholte Addition kann man durch ein Produkt ersetzten:

   $$2+2+2+2+2=5\cdot 2$$

6.2.1. Erste Anwendung

Die Reihe der ersten *n* ungeraden Zahlen kann man mit diesen Regeln vereinfachen: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=\sum_{i=1}^{n}2i+\sum_{i=1}^{n}(-1)=2\sum_{i=1}^{n}i+(-1)\sum_{i=1}^{n}1=2\sum_{i=1}^{n}i-(1\cdot)n$.

Man erkennt an dieser Umformung, dass die Summe der ersten *n* ungeraden Zahlen gleich dem Doppelten der Summe der ersten *n* Zahlen minus *n* ist.

6.2.2. Laufindexverschiebung

In vielen Fällen ist es geschickt, wenn man den ***Laufindex*** verändert. Dies sei am folgenden Beispiel demonstriert:

$$\sum_{i=10}^{20}(2i-20)=\sum_{i-10=0}^{20-10}2\cdot(i-10)=2\sum_{k=0}^{10}k=2\cdot(0+1+2+...+10)=2\cdot\binom{11}{2}=110$$

(Vergleiche den letzten Schritt mit der Eigenschaft e) der Einträge des Pascalschen Dreiecks auf Seite 6).

Erklärung

Unter dem ersten Summenzeichen wandeln wir die Gleichung $i=10$ durch beidseitige Subtraktion von -10 in $i-10=0$ um. Dann heißt unser Laufindex nicht mehr *i* sondern $i-10$. Wenn wir allerdings die „*Anfangszahl*“ um zehn reduzieren, muss das auch mit der „Endzahl“ geschehen (sonst erhielten wir zehn zusätzliche Summanden). Die größte Zahl für den Index ist somit 10.

Darüber hinaus ersetzten wir bei den Summanden (rechts vom Summenzeichen) den alten Laufindex *i* ebenfalls durch $i-10$. Die Reihe vereinfacht sich allerdings erst, wenn wir unserem neuen Laufindex $i-10$ einen neuen Namen geben. Wir substituieren also $i-10$ → *k.*

6.3. Dreieckszahlen – Summe der ersten *n* natürlichen Zahlen

Im Alter von sieben (!) Jahren sollte der deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777-1855) mit einer Rechenaufgabe „ruhig gestellt“ werden, damit dessen Mathematiklehrer sich „*ungestört*“ mit dem Rest der Klasse beschäftigen konnte.

Die Aufgabe lautete sinngemäß:

„Zähle die Zahlen von 1 bis 100 zusammen!“

Nach wenigen Minuten war der Junge fertig. Er hatte nicht nur diese Summe berechnet, sondern gleich eine Formel zur Berechnung jeder beliebigen Summe dieser Art mit geliefert.

Seine Rechnung ist elegant und ist bereits für Grundschüler nachvollziehbar.

Berechne einfach das Doppelte der Summe auf folgende Art und Weise:

- Schreibe unter die Summe von 1 bis 100 die selben Zahlen noch einmal in umgekehrter Reihenfolge:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & 100 & + \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & ... & + & 1 & = \end{array}$$

- Du siehst sofort, dass die untereinander stehenden Summanden zusammen alle gleich sein müssen (oben wird's immer eins mehr, unten dafür eins weniger). Es ergeben sich 100 gleiche Summanden der Größe 101:

$$\begin{array}{cccccccccc} 101 & + & 101 & + & 101 & + & ... & + & 101 & = \end{array}$$
$$100 \cdot 101$$

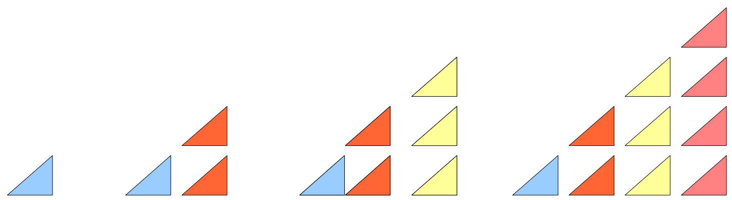
- Nun hat der kleine Gauß aber bei seinem Trick das Doppelte der Summe berechnet. Die Summe ist daher nur halb so groß.

$$\rightarrow 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \quad ... \quad + \quad 100 \quad = \quad \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 5.050 \qquad (1)$$

6.3.1. Woher kommt der Name „Dreieckszahl“?

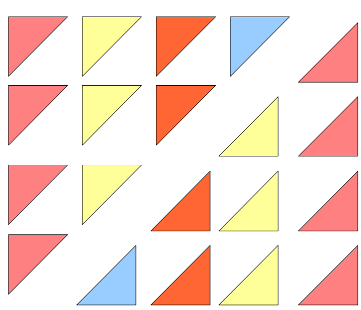
Die Summe der ersten beiden natürlichen Zahlen ergibt $1+2=3$, die Summe der ersten drei Zahlen ergibt $1+2+3=6$. Man erhält die Zahlenfolge $1;3;6;...$ (An der 100. Stelle trifft man hier auf die oben berechnete Zahl 5.050.)

Allgemein bezeichnet man das *n*-te Glied dieser Zahlenfolge als „***n*-te Dreieckszahl**“. Wir schreiben dafür kurz $d(n)$*.* Tatsächlich gibt es einen geometrischen Zusammenhang zu Dreiecken:



Interpretiert man die Dreieckszahlen jeweils als Anzahl von Punkten, so kann man mit diesen Punkten Dreiecke beschreiben.
(Wenn die „Punkte“ dreieckig sind, sieht es etwas schöner aus.)

6.3.2. Allgemeine Formel für die *n*-te Dreieckszahl



Nimmt man zwei Dreiecke zu je $d(n)$ Punkten, dreht eines davon um 180° und legt es neben das andere, erhält man ein Rechteck aus $2 \cdot d(n)$ Punkten.
Die Punktzahl lässt sich aber ebenso aus der Formel „*Länge x Breite*“ mit $(n+1) \cdot n$ bestimmen. Dies liefert uns die allgemeine Formel für die *n*-te Dreieckszahl. Man bezeichnet sie nach dem schlauen Carl Friedrich übrigens

auch als „***der kleine Gauß***".

$$n\text{-te Dreieckszahl } d(n)=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1) \qquad (2)$$

Tipps:

1. Entweder *n* oder sein Nachfolger ist gerade. Die Rechnung vereinfacht sich, wenn man schnell im Kopf die gerade Zahl halbiert und mit der ungeraden multipliziert.
2. Multipliziert man eine zweistellige Zahl mit 101, so erhält man das Ergebnis, indem man die Zahl zwei Mal hinter einander schreibt.

Damit kann man die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen problemlos im Kopf berechnen: $\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 101=50\cdot 101=5050$.

Hinweis:

Die Dreieckszahlen finden sich auch im Pascalschen Dreieck wieder. (Vgl. Eigenschaft c) auf Seite 6). Man kann sie daher entweder als Summe von Binomialkoeffizienten oder durch einen einzigen Binomialkoeffizienten ausdrücken:

$$d(n)=\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{1}=\binom{n+1}{2}$$

6.3.3. Aufgabe 1

Beweise: *Die Summe zweier aufeinander folgender Dreieckszahlen ergibt stets eine Quadratzahl.*

Lösung

Die *n*-te Dreieckszahl *d(n)* wird aus der Summe aller natürlichen Zahlen kleiner gleich *n* berechnet. Wie schon gezeigt, gilt für die Dreieckszahlen die Formel:

$$d(n)=1+2+\ldots+(n-1)+n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$$

$$\rightarrow \begin{aligned} d(n)+d(n+1) &= \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)+\frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot(n+2) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)\cdot\big(n+(n+2)\big) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir einfach die gemeinsamen Faktoren der beiden Summanden ausgeklammert.

Nun ist die Hälfte der Summe einer Zahl (*n*) und ihrem Nach-Nachfolger $(n+2)$ gleich dem Nachfolger $(n+1)$. Damit ist bereits alles bewiesen. q.e.d.

Bemerkung

Wir blicken wieder zurück auf die Binomialkoeffizienten und das Pascalsche Dreieck:

Mit der Definition, dass $\binom{n}{k}=0$ für $n<k$ gilt, erhalten wir mit dem obigen Beweis für $n\in\mathbb{N}$:

$$\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}=n^2$$

Dies entspricht im Kapitel 2 der Eigenschaft i).

6.3.4. Aufgabe 2

Beweise: *Multipliziert man 4 aufeinander folgende natürliche Zahlen, so erhält man stets das Achtfache einer Dreieckszahl.*

Lösung

Man muss zeigen, dass natürliche Zahlen *k* und *n* existieren, so dass für die folgende Gleichung (3) eine wahre Aussage entsteht:

$$k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)=8\cdot\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1) \qquad (3)$$

Die erste Umformung beinhaltet bereits einen kleinen Trick und bereitet damit unseren zentralen Schritt vor:

$$\frac{1}{8}\cdot k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$$

Wir „verteilen" den Faktor $\frac{1}{8}$ auf drei Faktoren, so dass die linke Seite, die gleiche Form erhält wie die rechte Seite.

Außerdem stellen wir auf der linken Seite der Gleichung die Faktoren mit *k* etwas um, so dass wir (jeweils mit einem Faktor $\frac{1}{2}$) eventuell zwei aufeinander folgende natürliche Zahlen nachweisen können:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{k\cdot(k+3)}{2}\cdot\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2} \qquad (4)$$

Multipliziert man die Klammern aus, ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2+3k}{2}\cdot\frac{k^2+3k+2}{2} \qquad (5)$$

Und tatsächlich erreichen wir durch eine weitere Termumformung:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2+3k}{2}\cdot\left(\frac{k^2+3k}{2}+1\right) \qquad (6)$$

Bleibt zu zeigen, dass der zweite Faktor von (6) eine natürliche Zahl ist. (Dann ist auch der dritte Faktor eine natürliche Zahl.) Dies ist der Fall, wenn der Zähler eine gerade Zahl ist.

An (4) erkennt man, dass unsere Forderung erfüllt ist, denn von den beiden

Zahlen *k* und *(k +3)* ist auf jeden Fall eine Zahl gerade – somit auch das Produkt.

Damit ist die Hälfte davon $\frac{k\cdot(k+3)}{2}=\frac{k^2+3k}{2}$ eine natürliche Zahl. Es ist gerade die Nummer *n* der entsprechenden Dreieckszahl *d(n)*. q.e.d.

Bemerkung

Zu einer Zahl *n* kann man über Faktorenvergleich eine Zahl (Zahlen) $k=k(n)$ berechnen, so dass die obige Gleichung erfüllt ist. Wie?
Aber ***Achtung:*** Nicht zu jeder Dreieckszahl gibt es tatsächlich 4 aufeinander folgende natürliche Zahlen. Die Aussage unserer Aufgabe macht nur den Schluss in eine Richtung. Die Umkehrung ist in der Regel falsch.

6.4. Summe der ersten *n* Quadratzahlen

Leider kann man die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, usw. nicht so schön paaren wie die natürlichen Zahlen im Kapitel 6.3. Die Suche nach einer Summenformel für Quadratzahlen gestaltet sich daher etwas komplizierter.

Zunächst betrachten wir die Differenzen aufeinander folgender Quadratzahlen:

n^2	0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 ...
Differenzen	1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 ...

Man kann leicht zeigen, dass jede ungerade positive Zahl sich durch eine Differenz zweier aufeinander folgender Quadratzahlen schreiben lässt:

$$n^2-(n-1)^2=(n+(n-1))\cdot(n-(n-1))=(2n-1)\cdot 1=2n-1$$

Damit ist gezeigt:

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist die n-te ungerade Zahl $2n-1$ gleich der Differenz aus der n-ten Quadratzahl n^2 und ihrer „Vorgängerquadratzahl“ $(n-1)^2$.

Aus diesem Grund kann man die Quadratzahl n^2 auch als Summe der ersten *n* ungeraden Zahlen schreiben. So ist beispielsweise 7^2 gleich $1+3+5+7+9+11+13=49$.

Und Allgemein ausgedrückt:

$$n^2=1+3+5+\ldots+2\text{n}-1=\sum_{k=1}^{n}(2k-1) \qquad (7)$$

6.4.1. Die Summe der ersten 5 Quadratzahlen

Mit dieser Information schreiben wir die Summe der ersten fünf Quadratzahlen als „Wert“ eines Dreiecks. Wir nennen es im folgenden „***Quadratsummendreieck***“.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & 9 \\
 & & & 7 & 7 \\
 & & 5 & 5 & 5 \\
 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2
\end{array}
$$

Offensichtlich ist die Anzahl der Zahlen in diesem Dreieck (oberhalb des Strichs) gleich der fünften Dreieckszahl $d(5)=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15$.

Allgemein

Bildet man die Summe der ersten n Quadratzahlen auf die oben beschriebene Art mit einem „Quadratsummendreieck“, so befinden sich genau $d(n)=\sum_{i=1}^{n} i$ Zahlen in dem Dreieck.

Trick:

Wir addieren drei solcher Dreiecke zu einem „verdreifachten Quadratsummendreieck“. Zuvor drehen wir aber zwei der Dreiecke so, dass die Summe der entsprechenden Zahlen an jeder Stelle stets das Gleiche ergibt.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & 9 \\
 & & & 7 & 7 \\
 & & 5 & 5 & 5 \\
 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
\;+\;
\begin{array}{ccccc}
 & & & & 1 \\
 & & & 3 & 1 \\
 & & 5 & 3 & 1 \\
 & 7 & 5 & 3 & 1 \\
9 & 7 & 5 & 3 & 1
\end{array}
\;+\;
\begin{array}{ccccc}
 & & & & 1 \\
 & & & 1 & 3 \\
 & & 1 & 3 & 5 \\
 & 1 & 3 & 5 & 7 \\
1 & 3 & 5 & 7 & 9
\end{array}
\;=
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & 11 \\
 & & & 11 & 11 \\
 & & 11 & 11 & 11 \\
 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
11 & 11 & 11 & 11 & 11
\end{array}
$$

Wow! Damit erhalten wir als dreifache Quadratzahlensumme der ersten fünf Quadratzahlen das Elffache der 5. Dreieckszahl. Kurz:

$$\sum_{i=1}^{5} i^2=11\cdot\sum_{i=1}^{5} i=11\cdot d(5)=11\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=165 \qquad (8)$$

6.4.2. Verallgemeinerung

Dieses Ergebnis wollen wir nun auf die Summe der ersten *n* Quadratzahlen verallgemeinern.

Das Verfahren bleibt gleich, aber natürlich muss man beweisen, dass in *jedem* verdreifachten Quadratsummendreieck an jeder Stelle nur gleiche Zahlen stehen.

Behauptung:
Im dreifachen Quadratsummendreieck steht an jeder Stelle die Zahl $2n+1$.

Beweis:

Betrachten wir unsere Quadratsummendreiecke als Bauwerke:

Im Ausgangsdreieck sind die Zahlen an allen Stellen einer Etage jeweils gleich. Im Erdgeschoss stehen nur Einsen, in der darüber liegenden ersten Etage nur Dreien, im zweiten Stockwerk sind es nur Fünfen usw.

In den „gedrehten" Quadratsummendreiecken gilt dies nicht. Wohl aber für die Summen der Zahlen im „doppelten" Quadratsummendreieck.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & 1 & & & & & & 2 \\
 & & & 3 & 1 & & & & & 1 & 3 & & & & & 4 & 4 \\
 & & 5 & 3 & 1 & + & & & 1 & 3 & 5 & = & & & 6 & 6 & 6 \\
 & 7 & 5 & 3 & 1 & & & 1 & 3 & 5 & 7 & & & 8 & 8 & 8 & 8 \\
\mathbf{9} & 7 & 5 & 3 & 1 & & \mathbf{1} & 3 & 5 & 7 & 9 & & \mathbf{10} & 10 & 10 & 10 & 10
\end{array}
$$

Daher untersuchen wir die Summen der Zahlen dieser beiden gedrehten Quadratsummendreiecke. Wir erinnern uns: die größte Zahl in den Dreiecken ist die *n*-te ungerade Zahl $2n-1$. Jetzt wird's aufgrund der allgemeinen Darstellung mit den Indexen etwas schwierig. (Als Schüler muss man das nicht unbedingt verstehen.)

Tipp: Kontrolliere mit konkreten Zahlen für *j* und *k* die nachfolgenden mathematischen Aussagen am obigen Beispiel.

Im Erdgeschoss (0-ter Stock, $j=0$) trifft zunächst diese größte Zahl des einen Dreiecks auf die kleinste des anderen (eine Eins), was zur Zahl $2n$ führt. Dies sei der 0-te Eintrag $(k=0)$ in der 0-ten Etage des Summendreiecks. (Vgl. rote Markierungen in den Dreiecken). Daneben liegt als nächster Eintrag $(k=1)$ die Summe aus der zweitgrößten und der zweit kleinsten Zahl beider Dreiecke, also $2n-3+3=2n$.

Somit ergeben in der 0-ten Etage $(j=0)$ alle *n* Summen den gleichen Wert. Addiert man die beiden *k*-ten Zahlen für $0 \leq k \leq n-1$, erhält man in jedem Fall $(2n-1-2k)+(1+2k)=2n$, also das doppelte von *n*.

Im darüber liegenden ersten Stock $(j=1)$ trifft die zweitgrößte Zahl auf die kleinste, bzw. die drittgrößte auf die zweit kleinste usw. Hier gibt es aber nur noch $n-1$ Einträge.

D. h. bei $j=1$ gilt für $0 \le k \le n-2$: $(2n-3-2k)+(1+2k)=2n-2$

→ Allgemein gilt für die Eintäge der *j*-ten Etage ($0 \le j \le n-1$ und $0 \le k \le (n-1)-j$):

$$(2n-1-2j-2k)+(1+2k)=2n-2j=2\cdot(n-j) \qquad (9)$$

Bemerkung: Am Ausdruck (9) kann man zum einen erkennen, dass im doppelten Quadratzahlendreieck die Zahlen einer Etage alle gleich sind. Zum anderen werden die Zahlen mit jedem Stockwerk um 2 kleiner. Die größten auftretenden Zahlen sind jeweils $2n$ im Erdgeschoss, die kleinste Zahl 2 tritt nur einmal an der Spitze auf (im $(j-1)$-ten Stock).

Da im Erdgeschoss unseres Ausgangsdreiecks lauter Einsen liegen, ergibt sich mit (9) für das dreifache Quadratsummendreieck die Zahl $2n+1$. Da außerdem im Ausgangsdreieck die darüber liegenden Zahlen mit jeder Etage um 2 zunehmen, ist gezeigt, dass im dreifachen Quadratsummendreieck mit $2n+1$ nur gleiche Zahlen zu finden sind. q.e.d.

Das allgemeine *verdreifachte* Quadratsummendreieck besteht somit aus der $d(n)$ mal auftretenden Zahl $2n+1$, bzw. aus $\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-1)$ mal $2n+1$.

Teilen wir das Produkt dieser Zahlen durch 3, so erhalten wir als „Wert“ des einfachen Dreiecks unsere *n*-te Quadratzahlensumme.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=1^2+2^2+3^2+\ldots n^2=\frac{n\cdot(n+1)\ \cdot\ (2n+1)}{2\ \cdot\ 3}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \qquad (10)$$

6.5. Vereinfachung einer „Dreifachreihe“

Vereinfache die folgende (etwas „abgefahrene“) Reihe: $\sum_{i=0}^{x-1}\sum_{j=i}^{x-1}\sum_{k=i}^{x-1} 1$

Lösung

Wir „*hangeln*“ uns von innen nach außen durch.

Erste Überlegung

Wie viele Summanden mit der 1 gibt es in der Summe $\sum_{k=i}^{x-1} 1$?

Bilden wir zunächst ein konkretes Beispiel:
Setzt man für *i* eine Zahl ein (z. B. 5) und für $x-1$ eine andere Zahl (z. B. 10), dann sind es $10-5+1$ Summanden. (Zähle zur Kontrolle mit den Fingern von 5 bis 10.)

Entsprechend ist $\sum_{k=i}^{x-1} 1=(x-1)-i+1=x-i$.

Zweite Überlegung

Was bedeutet nun $\sum_{j=i}^{x-1}\sum_{k=i}^{x-1} 1=\sum_{j=i}^{x-1}(x-i)$?

Noch wissen wir nichts über *i*. Daher können wir wieder nur die Anzahl der Summanden bestimmen. Es sind genau wie bei der 1. Überlegung $(x-1)-i+1$ Summanden. Im Unterschied zu oben wird nun über $(x-i)$ summiert.

$$\rightarrow \sum_{j=i}^{x-1}\sum_{k=i}^{x-1} 1=\sum_{j=i}^{x-1}(x-i)=(x-i)\cdot(x-i)=(x-i)^2$$

Dritte Überlegung

Was bedeutet $\sum_{i=0}^{x-1}(x-i)^2$?

Der erste Summand (für $i=0$) ist x^2, der zweite ist $(x-1)^2$, dann kommt $(x-2)^2$ usw. bis der letzte Summand schließlich $(x-(x-1))^2=1$ ergibt. Analog ist der vorletzte Summand $(x-(x-2))^2=2^2$.

Wir erhalten: $$\sum_{i=0}^{x-1}(x-i)^2=x+(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+...+2^2+1 \qquad (11)$$

Der Ausdruck (11) ist also gerade die Summe der ersten *x* Quadratzahlen. ($x\in\mathbb{N}$, sonst macht die Summendarstellung keinen Sinn.) Für die Summe der ersten Quadratzahlen haben wir mit (10) im Kapitel 6.4 bereits eine Formel kennen gelernt. Wir erhalten das schöne

6.5.1. Ergebnis

$$\sum_{i=0}^{x-1}\sum_{j=i}^{x-1}\sum_{k=i}^{x-1} 1=\frac{x\cdot(x+1)\cdot(2x+1)}{6} \qquad (12)$$

Alternative zur 3. Überlegung

Die letzte Überlegung war ziemlich elegant. Es geht auch mit den Umformungsregeln für Reihen aus Kapitel 6.2.

Dazu schreibt man zunächst mit der 2. Binomischen Formel den Ausdruck $(x-i)^2$ um. Anschließend wenden wir das ***Kommutativgesetz der Addition*** an und „paaren“ gleichartige Summanden. Dadurch wandelt sich in (13) die eine Reihe in eine Summe von drei Reihen.

$$\sum_{i=0}^{x-1}(x^2-2xi+i^2)=\sum_{i=0}^{x-1}x^2-\sum_{i=0}^{x-1}2xi+\sum_{i=0}^{x-1}i^2 \tag{13}$$

Nun wenden wir bei der rechten Seite von (13) auf die ersten beiden Reihe das ***Distributivgesetz*** an. Wir ziehen hierbei gleiche Faktoren aus der Summe heraus.

Beachte: Nur der Wert für *i* ändert sich von Summand zu Summand. x^2 oder *x* bleiben hingegen unverändert und können „*ausgeklammert*" werden. (Die Klammer um die Reihe darf man weglassen.)

$$\sum_{i=0}^{x-1}x^2-\sum_{i=0}^{x-1}2xi+\sum_{i=0}^{x-1}i^2=x^2\sum_{i=0}^{x-1}1-2x\sum_{i=0}^{x-1}i+\sum_{i=0}^{x-1}i^2 \tag{14}$$

Die erste Summe von (14) ergibt $(x-1)-0+1$ Einsen, also x, die zweite die $(x-1)$-te Dreieckszahl $d(x-1)$ (= Summe der ersten $(x-1)$ natürlichen Zahlen), und die dritte ergibt die Summe der ersten $(x-1)$ Quadratzahlen.

Mit den Formeln (2) und (10) aus den Kapiteln 6.3.2 und 6.4.2 folgt:

$$\rightarrow \sum_{i=0}^{x-1}\sum_{j=i}^{x-1}\sum_{k=i}^{x-1}1=x^3-2x\cdot\frac{1}{2}(x-1)\cdot x+\frac{1}{6}\cdot(x-1)\cdot x\cdot(2(x-1)+1) \tag{15}$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der rechten Seite von (15) erkennt man nach kurzer Rechnung die Gleichheit zum obigen Ergebnis (12). (Am einfachsten vereinfacht man dabei die ersten beiden Summanden in (15) zu x^2.)

6.5.2. Übungen

Schreibe unter Verwendung des Summenzeichens:

a) $(4a_0+2)+(4a_1+2)+(4a_2+2)+(4a_3+2)$

b) $5+12+19+26+33+40+47+54+61$

c) $2+5+10+17+26+37+50+65+82+101+122$

d) $a_{12}\cdot b_{23}+a_{13}\cdot b_{33}+a_{22}\cdot b_{23}+a_{23}\cdot b_{33}$

6.5.3. Lösungen zu den Übungen

a) $2\cdot\sum_{i=0}^{3}(2a_i+1)$ b) $\sum_{i=0}^{8}(5+7i)$

c) Die Summe besteht aus den Nachfolgern der ersten 11 Quadratzahlen. Die *k*-te Quadratzahl erhält man aus der Summe der ersten *k* ungeraden Zahlen.

$$\rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{11}(1+i^2)=\sum_{i=1}^{11}\left(1+\sum_{j=1}^{i}(2j-1)\right)$$

d) Hier haben wir eine „fiese“ Doppelsumme. Beachte, dass beim Produkt aus *a* und *b* jeweils der zweite bzw. der erste Index gleich sind. (Der zweite Index bei *b* bleibt unverändert.) Die bei *a* und *b* gleichen Indexe laufen zwei Mal von 2 bis 3. Einziger Unterschied ist hierbei der erste Index von *a*. Dieser läuft von 1 nach 2.

$$\rightarrow a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} = \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=2}^{3} (a_{ij} \cdot b_{j3}) \right)$$

7. Eine Schachtel mit *n* Stäbchen

(sinngemäß nach: http://www.matheraum.de/read?i=174533)

Aufgabe: *In einer Schachtel liegen* $n \in \mathbb{N}$ *Stäbchen. Das k-te Stäbchen sei k Längeneinheiten lang.*

Nun werden zufällig drei dieser Stäbchen ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man damit ein Dreieck bilden?

7.1. Lösung

Spielt die Reihenfolge keine Rolle, so gibt es beim Ziehen von 3 Stäbchen aus *n* Stäbchen nach Kapitel 4.1.2 insgesamt

$$\binom{n}{3} \text{ verschiedene Möglichkeiten.} \qquad (16)$$

Aus den gezogenen drei Stäbchen soll ein Dreieck gelegt werden. Dazu müssen die beiden Kleineren zusammen größer sein als das Längste.

Die Seitenbezeichnung spielt bei unserer Aufgabe keine Rolle. Daher vereinbaren wir:

das längste Stäbchen sei *c*, das zweit längste *b* und das kürzeste *a*.

7.1.1. Ein konkretes Zahlenbeispiel

Wir verschaffen uns mit einem Beispiel zunächst ein „Gefühl“ für die anschließende allgemeine Lösung. Darüber hinaus können wir später unsere Lösung an den gefundenen Zahlen verifizieren.

Für $n=9$ finden wir relativ schnell folgende für unsere Forderung „günstige“ Konstellationen mit $a+b>c$ (alternativ: $a+b \geq c+1$):

$c=3$ geht nicht, da dann $b=2$ und $a=1$ sein müssen. Das ergibt kein Dreieck!
$c=4$ geht nur mit $b=3$ und $a=2$. Mit $a=1$ ergibt sich ebenfalls kein Dreieck. → 1 Mögl.
$c=5$ geht mit $b=4$ und $a=3$ sowie mit $b=4$ und $a=3$ → 2 Möglichkeiten
$c=6$: $b=5$: $a=4;3;2$ $b=4$: $a=3$ → 4 Möglichkeiten
$c=7$: $b=6$: $a=5;4;3;2$ $b=5$: $a=4;3$ → 6 Möglichkeiten
$c=8$: $b=7$: $a=6;5;4;3;2$ $b=6$: $a=5;4;3$ $b=5$: $a=4$ → 9 Möglichkeiten
$c=9$: $b=8$: $a=7{,}6;5;4;3;2$ $b=7$: $a=6;5;4;3$ $b=6$: $a=5;4$ → 12 Möglichkeiten

→ Wenn in der Schachtel 9 Stäbchen liegen, gibt es für ein Dreieck 34 Kombinationen. Da es nach (16) für die Wahl von 3 Stäbchen aus 9 insgesamt $\binom{9}{3}=84$ Möglichkeiten gibt, beträgt nach Kapitel 5.3 die Wahrscheinlichkeit für eine „günstige“ Stäbchenkombination $\frac{34}{84}\approx 40{,}5\,\%$.

7.1.2. Zahl der „günstigen“ Möglichkeiten, wenn c gegeben ist

Am konkreten Beispiel erkennen wir zwei Regelmäßigkeiten:

1. Wenn *c* gerade ist, ergeben sich Quadratzahlen als Anzahl der Möglichkeiten jeweils durch Summenbildung der ersten ungeraden Zahlen $(1;1+3=4;1+3+5=9;...)$.
2. Wenn *c* ungerade ist, addiert man die geraden Zahlen und erhält die Zahlenfolge $(2;2+4=6;2+4+6=12;...)$.

Es wird etwas Mühe kosten, diese Vermutungen zu beweisen. Aufgrund der beiden obigen Regelmäßigkeiten machen wir auf alle Fälle eine Fallunterscheidung.

Hinweis

Die Anzahl der Stäbchenkombinationen bei ungeradem c beschreiben wir im Folgenden mit der Variablen c_{ug}, die Möglichkeiten bei geradem c seien dementsprechend durch die Variable c_g dargestellt. (Später müssen wir die Möglichkeiten für alle $c\leq n$ addieren):

Fall 1: ($c=2k-1$ mit $k\geq 3$, also *c* ungerade und $c\geq 5$)

Wegen der Bedingung für ein Dreieck gilt:

$$a+b\geq c+1=2k \tag{17}$$

Da *a* bestenfalls der Vorgänger von *b* sein kann, gilt weiter

$$2b-1\geq a+b \tag{18}$$

Aus (17) und (18) erhalten wir die Ungleichung $2b\geq 2k+1$ und da *b* ganzzahlig ist, folgt eine „***untere Schranke***“ von *b* (kontrolliere am Beispiel oben):

$$k+1\leq b \tag{19}$$

(Da $b<c$ gilt, ist die „***obere Schranke***“ von *b* die Zahl $c-1$.)

Zu jedem *b* gibt es eine unterschiedliche Anzahl möglicher Werte für *a*. Hier ist die obere Schranke wegen (18) $b-1\geq a$. Aus (17) folgt als unter Schranke $2k-b\leq a$. Bildet man die Differenz der beiden Schranken und addiert 1, so erhält man die Anzahl der Möglichkeiten für *a* zum jeweiligen *b.*

Im Folgenden werden diese Möglichkeiten zu allen Werten von *b* addiert. (Aus dieser Summe sollten wir als Probe 12 Möglichkeiten für $c=9$ erhalten. Wegen $c=2k-1$ ist hier $k=5$.)

$$c_{ug} = \sum_{b=k+1}^{c-1} [(b-1)-(2k-b)+1] = \sum_{b=k+1}^{2k-2} [2(b-k)] = 2 \cdot \sum_{b-k=1}^{2k-2-k} (b-k) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{k-2} i$$

$$\rightarrow c_{ug} = (k-2) \cdot (k-1) \qquad (20)$$

(Der Wechsel des Laufindex von b über $b-k$ zu i wurde in Kapitel 6.2.2 erklärt.)

Fall 2: ($c=2k$ mit $k \geq 2$, also c gerade und $c \geq 4$)

Wir gehen vor wie oben: $a+b \geq 2k+1$ (21)

Die Ungleichung (18) gilt auch in diesem Fall → $b-1 \geq a$ ist die obere Schranke für *a*. Als untere Schranke für *a* liefert (21): $2k-b+1 \leq a$. Somit folgt:

$$c_g = \sum_{b=k+1}^{c-1} [(b-1)-(2k-b+1)+1] = \sum_{b=k+1}^{2k-1} [2(b-k)-1]$$

$$= \sum_{(b-k)=1}^{2k-1-k} [2(b-k)-1] = \sum_{i=1}^{k-1} 2i - \sum_{i=1}^{k-1} 1 = (k-1) \cdot k - [(k-1)-1+1]$$

$$\rightarrow c_g = (k-1)^2 \qquad (22)$$

7.1.3. Aufsummierung aller „günstigen" Möglichkeiten

Nun kommen wir langsam zur Lösung unseres Problems. Bei gegebenem *n* gibt es $\sum_{c=4}^{n} c$ Möglichkeiten für Dreiecke. Die Seite *c* ist in dieser Summe abwechselnd gerade und ungerade. Trennen wir die geraden von den ungeraden *c*, erhalten wir für den obigen Ausdruck zwei Summen:

$$\sum_{k=3}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} c_{ug} + \sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]} c_g \qquad (23)$$

Gaußklammer [ ]

Wir haben bei (23) die ***Gaußklammer*** $[\boldsymbol{x}]$ eingesetzt. Diese „entfernt" den Nachkommateil einer Zahl. In unserem Fall, erhalten wir für jedes *n* die „Nummer" des größten Wertes für c_{ug} bzw. des größten Wertes für c_g.

Zwei Beispiele (für ungerades und gerades *n*):

1. Sei $n=9$. Dann ist der größtmögliche ungerade Wert 9. Dies ist nach 1, 3, 5 und 7 die fünfte ungerade Zahl.

   Unsere Gaußklammer ergibt: $\left[\frac{9+1}{2}\right] = [5] = 5$ Stimmt!

   Der größte gerade Wert für *c* ist 8. Dies ist die vierte gerade Zahl nach 2, 4 und 6.

Hier errechnen wir mit der Gaußklammer: $\left[\frac{9}{2}\right]=[4{,}5]=4$ Stimmt auch.

2. Sei $n=10 \rightarrow$ Maximum für c_{ug} ist 9 $\rightarrow \left[\frac{10+1}{2}\right]=[5{,}5]=5$ Passt!

   $\rightarrow$ Maximum für c_g ist 10 $\rightarrow \left[\frac{10}{2}\right]=[5]=5$ Auch richtig.

Mit (20) und (22) wird aus (23):

$$\sum_{k=3}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(k-2)\cdot(k-1)+\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(k-1)^2 \qquad (24)$$

7.1.4. Erste Vereinfachungen

Im der folgenden Rechnung (25) vereinfachen wir beide Reihen von (24) mit dem Trick, den wir Kapitel 6.2.2 vorgestellt haben – der Laufindexverschiebung:

Bei der ersten Reihe wandeln wir $k=3$ durch beidseitige Subtraktion von -2 in $k-2=1$ um. Bei der zweiten Reihe wird analog aus $k=2 \rightarrow k-1=1$.

Die Summe vereinfacht sich aber nur, wenn wir den Laufindex umbenennen: In der linken Reihe wählen wir statt $k-2$ die neue Bezeichnung *i.* Hierbei muss man etwas aufpassen: da $k-1$ der Nachfolger von $k-2$ ist, wird hier aus diesem Faktor $i+1$.

Bei der zweiten Reihe von (24) ersetzen wir in der gleicher Weise den Laufindex *k* zunächst durch $k-1$ und nennen diesen Ausdruck dann ebenfalls *i*.

$$\sum_{k-2=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-2}(k-2)\cdot(k-2+1)+\sum_{k-1=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}(k-1)^2=\sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-2} i\cdot(i+1)+\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}(i)^2 \qquad (25)$$

Hinweise

In (25) erkennt man unsere Vermutung aus dem konkreten Beispiel gleich zu Beginn:

- Wie es scheint, lässt sich die Summe der ersten *k* geraden Zahlen als Produkt von *k* mit seinem Nachfolger darstellen.
  (Beispiel für $k=4$: $2+4+6+8=4\cdot 5$)
- Bei geradem *c* erhalten wir jeweils eine Quadratzahl.

7.1.5. Weitere Vereinfachungen

Wir können (25) noch weitere „Geheimnisse“ entlocken, wenn wir das Produkt in der linken Summe ausmultiplizieren und (durch Umsortierung aller

Summanden) die Summe in zwei Summen zerlegen.

$$\sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-2}(i^2+i)+\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} i^2=\sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-2} i^2+\sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-2} i+\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} i^2 \tag{26}$$

Falls n ungerade ist, gilt $\left[\frac{n+1}{2}\right]-2=\left[\frac{n}{2}\right]-1$. Sollte n gerade sein, ist der rechte Ausdruck um 1 größer als der linke. (Vergleiche dies mit den Beispielen zur Gaußklammer auf Seite 30.)

Im ersten Fall können damit die Summen der Quadrate zusammenfassen.

$$n \text{ ungerade: } \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} i+2\cdot\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} i^2\right) \tag{27}$$

Wir erhalten also für die Gesamtzahl der „günstigen“ Dreieckskonstellationen die Summe aus der Summe der ersten natürlichen Zahlen und dem Doppelten der Quadratzahlsumme dieser ersten natürlichen Zahlen.

Falls n gerade ist, gilt $\left[\frac{n+1}{2}\right]-2=\left[\frac{n}{2}\right]-2=\frac{n}{2}-2$. D. h. wir dürfen zum einen die Gaußklammer weg lassen, müssen aber zum anderen vor dem Zusammenfassen der Quadratsumme den größten Summanden der rechten Summe bei (26) abspalten:

$$n \text{ gerade: } \left(\frac{n}{2}-1\right)^2+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2} i+2\cdot\left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2} i^2\right) \tag{28}$$

Bevor wir unsere Rechnung überprüfen, ersetzen wir die Summe der natürlichen Zahlen und die Summe der Quadratzahlen durch die jeweiligen expliziten Formeln. Damit kommen wir zu gegebenem n recht schnell zu einem Ergebnis.

7.1.6. Anzahl der „günst.“ Dreieckskonstellationen bei ungeradem *n*

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\cdot\left[\frac{n}{2}\right]+2\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\cdot\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left(2\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)+1\right)\right)=\\ \frac{1}{2}\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\cdot\left[\frac{n}{2}\right]+\frac{1}{3}\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\cdot\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left(2\cdot\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\end{gathered} \tag{29}$$

7.1.7. Anzahl der „günst." Dreieckskonstellationen bei geradem *n*

$$\left(\frac{n}{2}-1\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)+2\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\left(2\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)+1\right)\right)=$$
$$\left(\frac{n}{2}-1\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot(n-3) \qquad (30)$$

Mit der Formel (29) erhalten wir für $n=9$ die bereits „gezählten" 34 Möglichkeiten. Für $n=8$ ergeben sich aus der Formel (30) 22 Möglichkeiten. Auch dies bestätigt unsere „Zählung" beim konkreten Beispiel.

7.1.8. Ergebnis

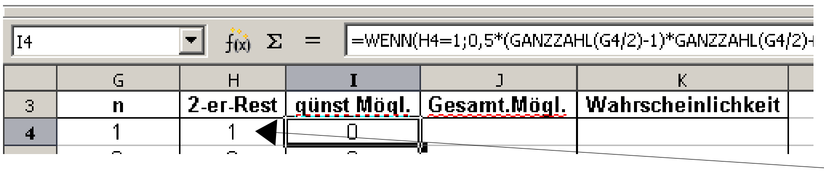
Nun sind wir in der Lage, zu jedem beliebigen *n* sofort die Anzahl der „günstigen" Kombinationen zu berechnen. Teilen wir diese Zahl mit Hilfe von (16) durch die Gesamtzahl aller Kombinationen, so erhalten wir die Wahrscheinlichkeit dafür, aus den *n* Stäbchen eine für ein Dreieck „günstige" 3-er-Kombination zu ziehen. Auf die allgemeine Darstellung dieser Wahrscheinlichkeiten wird hier aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

7.2. Einsatz des Computers

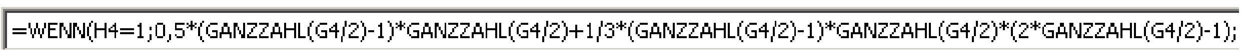
7.2.1. Die „Entwicklung" der Wahrscheinlichkeiten

Mit einem Tabellenkalkulationsprogramm (wie z. B. ***OpenOffice Calc***) verschafft man sich recht schnell einen Überblick, wie sich die Wahrscheinlichkeiten bei steigendem *n* entwickeln.

7.2.2. Hinweise zur Formeleingabe



1. Mit der Funktion ***Rest(Zellenbezug;2)*** erhält man in der Spalte H über den 2-er-Rest einen Indikator dafür, ob es sich bei dem jeweiligen *n* um eine gerade oder ungerade Zahl handelt.
2. Die Wirkung der Gaußklammer erzielt man mit der Funktion ***Ganzzahl()***.
3. Die Funktion ***Wenn-Dann(Bedingung; Anweisung 1; Anweisung 2)*** entscheidet (hier in der Spalte I) bei der Berechnung der Anzahl der „günstigen" Stäbchenziehungen, ob die Formel für gerades *n (Anweisung 1)* oder ungerades *n (Anweisung 2)* benutzt wird. Trifft die Bedingung zu (hier: H4=1), dann wird die Anweisung 1 ausgeführt (Formel (29)).



Andernfalls gilt die Formel (30) für gerades *n:*

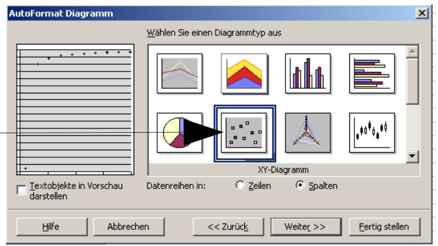
```
;(G4/2-1)^2+0,5*(G4/2-2)*(G4/2-1)+1/3*((G4/2)-2)*(G4/2-1)*(G4-3))
```

4. Das Programm berechnet die Gesamtzahl der Möglichkeiten genau 3 aus *n* Stäbchen zu ziehen mit der Funktion ***Kombinationen(n;3)***. (Leider liefert diese Funktionen für $n<3$ entgegen unserer Definition in Kapitel 6.3.3 eine Fehlermeldung – egal, wir löschen diese beiden Zellen einfach wieder!)
5. Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich aus dem Anteil der „günstigen“ Anzahl von der Gesamtzahl – also durch Quotientenbildung.

Für mich ergab sich hierbei ein überraschendes Ergebnis. Dieses sei an dieser Stelle aber nicht verraten.

7.3. Mit der Tabelle ein Diagramm erstellen

Die Tabelle kann in wenigen Schritten grafisch ausgewertet werden. Hierzu bietet eine gutes Tabellenkalkulationsprogramm einen Diagramm-Assistenten. Die Bedingung ist in der jeweiligen Programmhilfe unter dem Stichwort „Diagramm erstellen“ leicht nachvollziehbar.



- Man beachte, dass beim *Diagrammtyp das* XY-Diagramm gewählt werden muss.
- Zur Markierung der nicht nebeneinander liegenden Spalten von *n* und der *Wahrscheinlichkeiten* benutze man die ***Strg***-Taste zusammen mit der linken Maustaste.

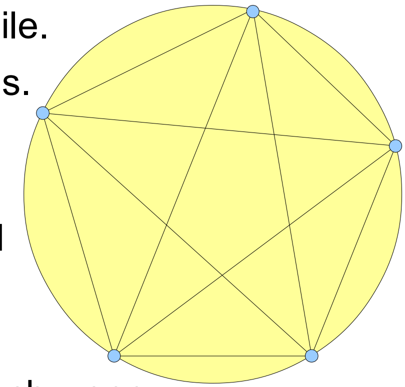
8. Das „Mosersche“ Kreisflächenproblem

Aufgabe: (nach Leo Moser aus dem Jahre 1950)
n Punkte liegen auf einem Kreis. Alle Punkte werden paarweise miteinander verbunden.

Bestimme die maximale Anzahl der Flächen, in die dadurch der Kreis zerfällt.

8.1. Erste Vermutung

Für die maximale Flächenzahl müssen die Kreispunkte so liegen, dass sich keine drei Verbindungslinien im Kreis schneiden.



- Bei zwei Punkten entstehen genau zwei Kreisteile.
- Bei drei Punkten entstehen vier Gebiete im Kreis.
- Mit dem 4. Punkt auf der Kreislinie zerfällt der Kreis in 8 Flächen.
- Mit dem 5. Punkt sind es 16 Flächen (siehe Bild rechts).
- Sind es mit dem 6. Punkt $32=2\cdot 16$ Flächen?

Nein! Verdammt – es sind höchstens 31 Flächen – auch wenn man noch so oft nachzählt.

Setzt man einen 7. Punkt, so bestenfalls „nur“ 57 Teilflächen.

Mit dieser Aufgabe haben wir ein Beispiel, welches uns mit den ersten Zahlen bei der Suche nach Regelmäßigkeiten auf eine falsche Fährte schickt. Regelmäßigkeiten bei einigen (endlich vielen) Zahlen können daher niemals ein Beweis für eine Formel sein.

Weitere Folgenglieder und weitere Informationen zu dieser Zahlenfolge (und vielen anderen) erhält man auf der folgenden Internetseite nach Eingabe der ersten Folgenglieder (leider in Englisch):

http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html

Wir haben eine weitere Herausforderung gefunden und machen uns auf die Suche nach einer Formel, die uns zu einer gegebenen Punktezahl die maximale Flächenzahl liefert.

8.2. Lösung mit Eulerscher Polyederformel

Wir betrachten den Kreis mit den Punkten als „geplätteten Polyeder“. Dabei wurde vor dem „*Platt walzen*“ eine Polyederfläche „aufgerissen“ und nach außen gezogen. Sie bildet jetzt die Außenfläche um den Kreis. Alle Flächen, Kanten und Ecken des Polyeders sind somit sichtbar und zählbar.

Von dem schweizer Mathematiker ***Leonard Euler*** (* 1707 – † 1783) stammt die ***Eulersche Polyederformel***. Nach ihr gilt:

Eckenzahl (*e*) + Flächenzahl (*f*) – Kantenzahl (*k*) = 2

Da die Außenfläche uns nicht interessiert, schreiben wir die Formel um:

$$\tilde{f} = f - 1 = 2 - e + k - 1 = k - e + 1 \qquad (31)$$

Schritt 1: (Bestimmung der Ecken)

- Auf der Kreislinie liegen genau *n* Punkte.
- Jeder Schnittpunkt im Kreis entsteht durch den Schnitt von genau 2 Kreissehnen. Jede Sehne wird durch 2 Endpunkte festgelegt.
  → Jeder Schnittpunkt wird durch die Wahl von 4 Kreispunkten eindeutig beschrieben. Da die Reihenfolge der Wahl keine Rolle spielt, benutzen wir für die Anzahl der Schnittpunkte im Kreis unsere Lösungsformel aus Kapitel 4.1.2.

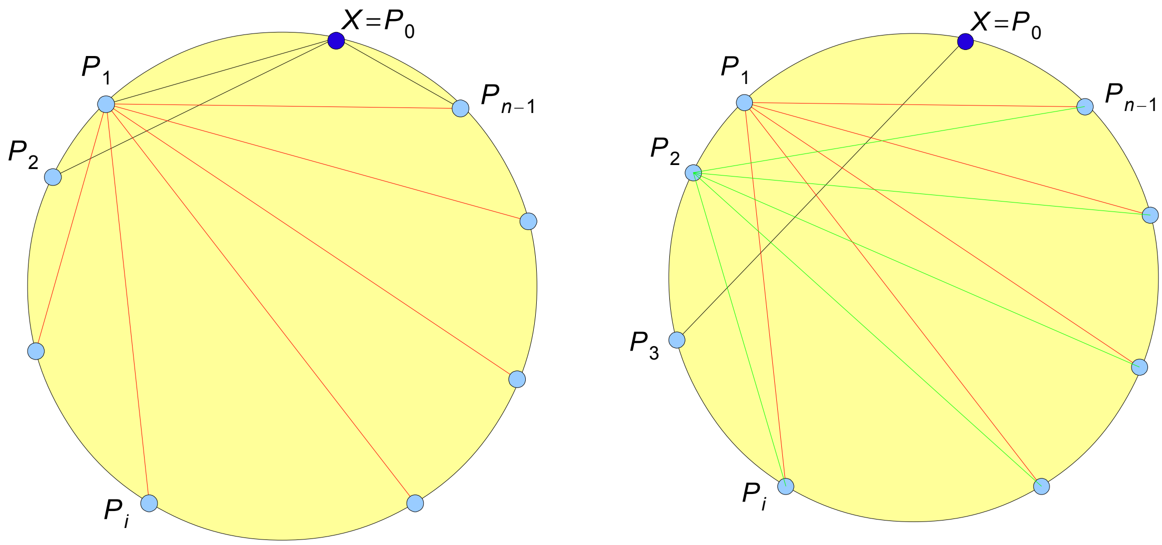
→ Es gibt in unserem Graphen $n + \binom{n}{4}$ Ecken. (32)

Schritt 2: (Bestimmung der Kanten)

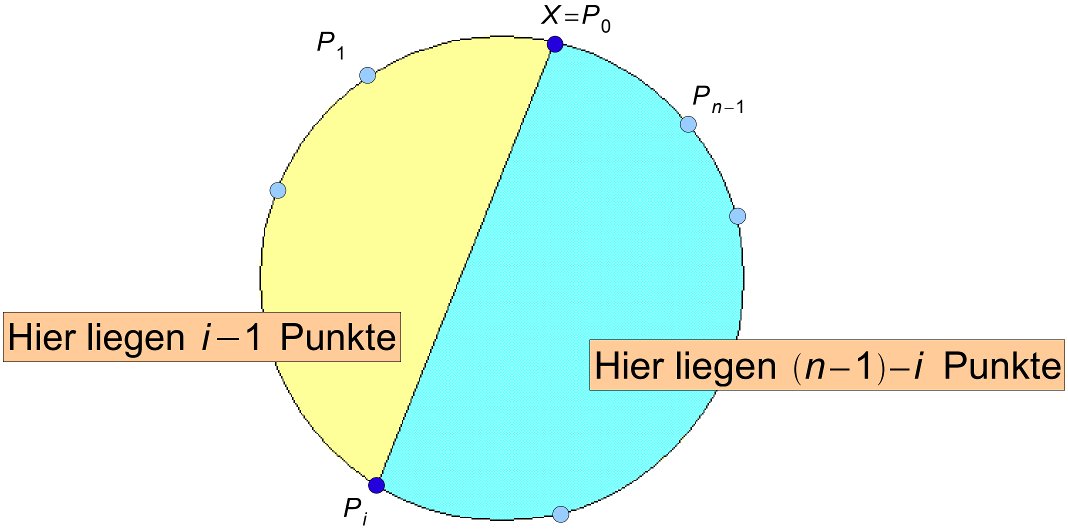
Von einem festen Punkt X auf dem Kreis führen *n-1* Sehnen weg.

Wir überlegen uns zunächst folgende Frage:

„In wie viele Teile wird eine Kreissehne durch Schneiden mit anderen Sehnen zerlegt?“



- Die Sehnen XP_1 und XP_{n-1} werden nicht geschnitten – sie liefern je 1 Kante.
- Die Sehnen XP_2 und XP_{n-2} werden jeweils von *n-3* Sehnen geschnitten (siehe linkes Bild). Sie liefern daher beide jeweils $n-3+\mathbf{1}$ Kanten. (*n* Schnitte erzeugen $n+\mathbf{1}$ Teilstücke).
- Die nächsten Sehnen XP_3 und XP_{n-3} werden beide von $2\cdot(n-4)$ Sehnen geschnitten (siehe rechtes Bild) und liefern jeweils $2\cdot(n-4)+\mathbf{1}$ Kanten.



Allgemein:

Die $i-1$ Punkte links von der Sehne XP_i müssen alle mit den $(n-1)-i$ Punkten rechts davon verbunden werden. Die Verbindungslinien „*zerlegen*“ die Sehne XP_i in $(i-1)\cdot(n-1-i)+\mathbf{1}$ Teilstücke (Kanten). Damit haben wir nun die Kantenzahl auf der Sehne XP_i.

Um die Kanten aller von X ausgehenden Sehnen zu bekommen, lassen wir den Punkt P_i auf dem Kreis „wandern“. Er soll alle Punkte P_i von $i=1$ bis $n-1$ „ablaufen“.

→ Von X „ausgehende“ Kantenzahl k_X:

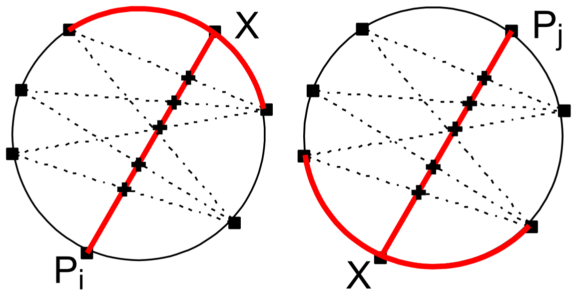
$$k_X=\sum_{i=1}^{n-1}\left((i-1)\cdot(n-1-i)+1\right)+\mathbf{2} \tag{33}$$

($+\mathbf{2}$ für jeweils 2 Kanten von X auf der Kreislinie.)

Nun darf auch X endlich alle Punkte auf dem Kreis durchwandern. Wir erhalten damit $n\cdot k_X$ „*raus gehende*“ Kanten.

Achtung:

Wir haben jede Kante doppelt gezählt (einmal „*raus*“ und einmal „*rein gehend*“). Zur „*Korrektur*“ teilen wir durch 2.



Somit kommen wir bei n Kreispunkten mit (33) auf die Gesamtkantenzahl:

$$k=\frac{n}{2}\cdot k_X \tag{34}$$

Schritt 3: (Einsatz der Eulerschen Polyederformel)

Wir sind fertig und errechnen mit (31), (32) und (34) die Zahl der Flächen:

$$\tilde{f}=k-e+1=\frac{n}{2}\cdot k_X-\left(n+\binom{n}{4}\right)+1$$

8.2.1. Vereinfachungen

1. Der Summenausdruck für k_X lässt sich umschreiben:

$$\begin{aligned}k_X-2&=\sum_{i=1}^{n-1}\left((i-1)\cdot(n-1-i)+1\right)=\sum_{i=1}^{n-1}\left((i\,n-i-i^2-n+1+i)+1\right)\\&=\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\,n-i^2-(n-2)\right)\\&=\sum_{i=1}^{n-1}n\cdot i-\sum_{i=1}^{n-1}i^2-\sum_{i=1}^{n-1}(n-2)\\&=n\cdot\sum_{i=1}^{n-1}i-\sum_{i=1}^{n-1}i^2-(n-2)\sum_{i=1}^{n-1}1\end{aligned}$$

Dies ist das n-fache der $n-1$-ten Dreieckszahl $d(n-1)$ abzüglich der Summe aller Quadrate 1 bis $(n-1)^2$ abzüglich dem $(n-2)$-fachen der Summe von $n-1$ Einsen.

Kurz:

$$k_X-2=n\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}-\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}-(n-2)\cdot(n-1)$$

Wir addieren auf beiden Seiten der Gleichung 2 und bringen auf der rechten Seite alle Brüche auf den Hauptnenner 6:

Es folgt:

$$k_X=\frac{3\cdot n^2\cdot(n-1)}{3\cdot 2}-\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}-\frac{6((n-2)\cdot(n-1)+2)}{6}=\frac{n\cdot(n^2-6n+17)}{6}$$

Damit erhalten wir für die Kantenzahl: $k=\frac{n}{2}\cdot k_X=\frac{n^2\cdot(n^2-6n+17)}{12}$

2. Auch die Eckenzahl lässt sich noch umformen:

$$e=n+\binom{n}{4}=n+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=\frac{24\cdot n}{24}+\frac{n^4-6\cdot n^3+11\cdot n^2-6n}{24}$$
$$=\frac{n^4-6\cdot n^3+11\cdot n^2+18n}{24}$$

3. Mit 1. und 2. können wir nun unsere obige Lösung in einer einheitlichen Darstellung formulieren:

$$\tilde{f}=k-e+1=\frac{2\cdot n^2\cdot(n^2-6n+17)}{24}-\frac{n^4-6\cdot n^3+11\cdot n^2+18n}{24}+\frac{24}{24}$$
$$=\frac{n^4-6\cdot n^3+23\cdot n^2-18n+24}{24}$$

4. Der etwas gebildete Mathematiker erkennt sofort (!), dass dieser Bruch nichts anderes ist als die Summe dreier Binomialkoeffizienten. (Durch Einsetzen der Formel für die Binomialkoeffizienten aus Kap. 4.1.2. und Rückwärtsrechnen gelangt man zur Gleichheit.)

   Es ergibt sich die schöne Formel: $\tilde{f} = \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4} = 1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$

8.3. Alternative Lösung in drei Schritten

1. Schritt: Wir beginnen mit einer Fläche, der Kreisfläche und überlegen, wann eine Fläche hinzu kommt.
→ Zwischensumme: 1 Fläche

2. Schritt: Eine neue Fläche entsteht immer dann, wenn eine Gerade auf den Rand trifft.

Es gibt n Punkte, von denen für eine Gerade 2 ausgewählt werden müssen. Dies gelingt auf $\binom{n}{2}$ Arten.

→ Zwischensumme: $1+\binom{n}{2}$

3. Schritt: Eine neue Fläche entsteht ebenso, wenn eine Kreissehne auf eine andere Sehne trifft. Zählen wir also die Sehnenschnittpunkte (vgl. erste Lösung Schritt 1).

→ Es kommen $\binom{n}{4}$ Möglichkeiten hinzu.

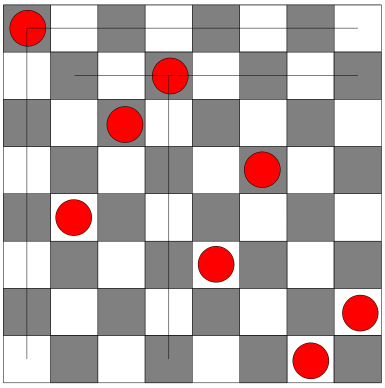
Das war`s schon. Es ergeben sich als Ergebnis $1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$ Flächen.

9. Acht Türme auf dem Schachbrett

Aufgabe:
Auf wie viele verschiedene Arten kann man auf den 64 Feldern eines Schachbretts acht Türme platzieren, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.

9.1. Allgemeine Lösung

Stellt man einen Turm auf das Spielfeld, so „deckt“ er genau „*seine*“ Zeile und „*seine*“ Spalte. Diese Felder sind anschließend für andere Türme verboten. Wenn alle acht Türme aufgestellt sind, muss folglich in jeder Zeile und Spalte genau ein Turm stehen.



Für das Setzen des ersten Turms in der ersten Zeile (bzw. Spalte) gibt es 8 Möglichkeiten. Für den zweiten Turm ist in der zweiten Zeile/Spalte bereits ein Feld durch den ersten Turm „gedeckt“ es verbleiben für ihn noch 7 Möglichkeiten. Dies geht so weiter bis für den letzten Turm nur noch 1 Möglichkeit übrig bleibt. Wir erhalten durch Kombination dieser Möglichkeiten das Ergebnis:

→ Anzahl aller möglichen Turmkonstellationen: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40320$.

Hinweis:

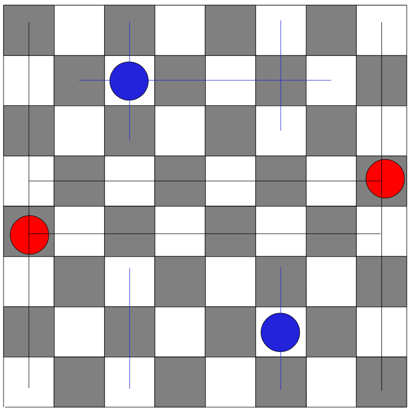
Unser Problem lässt sich wieder einmal umformulieren:

„*Auf wie viele Arten lassen sich 8 Elemente* (→ Türme) *auf 8 Feldern* (→ Zeilen) *anordnen.*“ Diese Problemstellung haben wir bereits bei den Permutationen in Kapitel 3 untersucht. Man erkennt bei einem Vergleich recht schnell die Gemeinsamkeiten.

9.2. Drehsymmetrische Lösungen

9.2.1. Lösungen mit 180°-Drehsymmetrie (= Punktsymmetrie)

Mit dem Setzten des ersten Turms ist bereits die Lage des hierzu symmetrischen „Partners“ festgelegt. Für den ersten Turm (und seinen Partner) existieren wie oben wieder 8 Möglichkeiten.

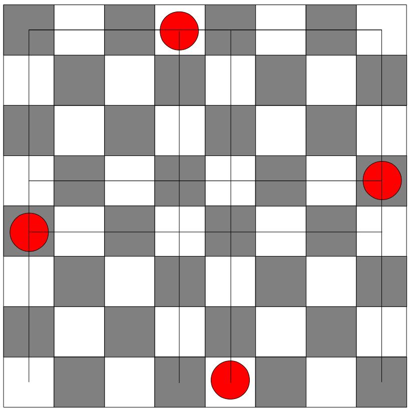


Damit sind für das zweite Paar bereits zwei Zeilen/Spalten blockiert. Es bleiben noch 6 Möglichkeiten für die Platzierung, für das dritte Paar sind es dann 4 und schließlich bleiben zwei Möglichkeiten für das letzte Paar.

→ Möglichkeiten bei 180°-Drehsymmetrie: $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$.

9.2.2. Lösungen mit 90°-Drehsymmetrie

Gilt die 90°-Symmetrie für eine Anordnung, so gilt natürlich auch die 180°-Symmetrie. Die hier berechneten Möglichkeiten sind somit schon in den oben berechneten 384 Möglichkeiten enthalten.

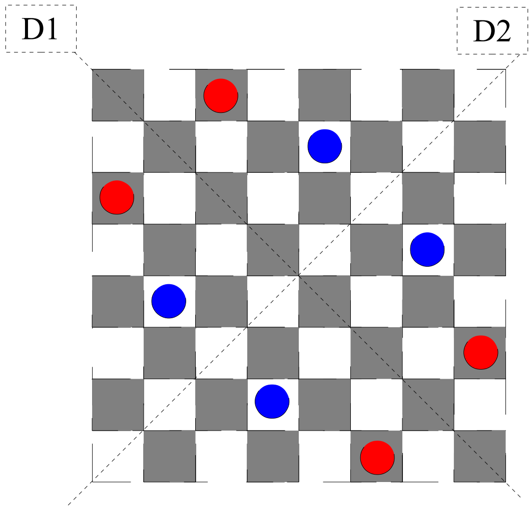


Die Überlegungen verlaufen hier ähnlich wie oben – mit zwei Unterschieden:

Erstens dürfen die Türme nicht auf der Diagonalen stehen, womit für den ersten Turm nur 6 Möglichkeiten (statt 8) bleiben. Analog der 180°-Drehsymmetrie werden mit dem ersten Turm bereits drei weitere symmetrische Turmpartner platziert. Wir können also nur zwei mal wählen – beim ersten Mal aus 6 Möglichkeiten, beim zweiten Mal bleiben nur noch 2.

→ Möglichkeiten bei 90°-Drehsymmetrie: $6 \cdot 2 = 12$.

9.3. Achsensymmetrische Lösungen



Vereinbarungen

- Die Anzahl der Türme auf der Diagonalen D1 von links oben nach rechts unten bezeichnen wir mit k.
- Analog seien auf der anderen Diagonalen D2 von links unten nach rechts oben l Türme.

Fall 1: (symmetrisch zu D1 und D2)

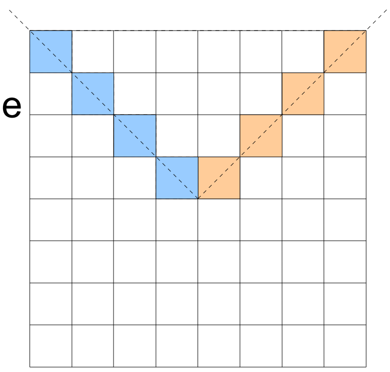
(Siehe Bild oben.)

Vorüberlegung

$8-(k+l)$ ist die Anzahl der Türme, die auf keiner Diagonalen stehen. Setzt man einen Turm neben die zwei Diagonalen, so muss sein Partner bzgl. der Symmetrieachse D1 gesetzt werden, und für diese beiden Türme anschließend auch die Partner bzgl. der zweiten Symmetrieachse D2. Es gibt somit eine „enge Verwandtschaft" von je 4 solcher Türme. Mathematisch folgt aus dieser Tatsache: $8-(k+l)$ muss durch 4 teilbar sein..

→ Folglich kommen für $k+l$ nur die Werte 0, 4, 8 in Frage. Dies ergibt drei Unterfälle:

Fall 1.1: $(k+l=8)$



Wir können uns darauf beschränken, $\frac{k}{2}$ Türme auf D1 in die blauen Kästchen zu setzen. Hierfür zählen wir die Möglichkeiten:

- Die anderen $\frac{k}{2}$ Türme ergeben sich automatisch als Partner bzgl. der Symmetrieachse D2.
- Die l Türme auf D2 ergeben sich automatisch aus den Zeilen, in denen kein Turm auf D1 steht.

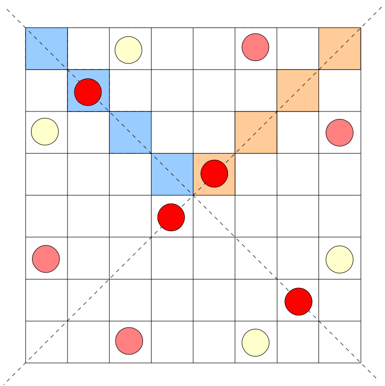
Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ergibt sich durch Aufaddierung der Möglichkeiten bei $(k=0, l=8); (k=2, l=6); (k=4, l=4); (k=6, l=8);$ und $(k=8, l=0)$:

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}=2^4=16 \qquad (35)$$

Fall 1.2: $(k+l=4)$

Wir zählen wieder die Anzahl der Möglichkeiten, $\frac{k}{2}$ Türme auf D1 auf die blauen Kästchen und $\frac{l}{2}$ Türme in D2 auf die orangenen Kästchen zu setzen. Wie im Falle 1.1 ergeben sich auch hier die anderen $\frac{k}{2}$ bzw. $\frac{l}{2}$ Türme als Partner bzgl. D1 bzw. D2.

Es gibt aber zwei Unterschiede zu Fall 1.1:



1. Hier werden nicht alle Zeilen mit Türmen auf den Diagonalen besetzt. D. h. wenn wir die Zahl der Möglichkeiten für Türme auf D1 kennen, müssen wir diese mit der Zahl der verbleibenden Möglichkeiten auf D2 kombinieren.
2. Wenn die Türme auf den Diagonalen gesetzt sind, gibt es noch Möglichkeiten, Türme neben den Diagonalen zu platzieren.

In unserem Fall sind folgende Varianten für k und l möglich: $(k=0, l=4); (k=2, l=2); (k=4, l=0)$. Wieder addieren wir die entsprechenden Anzahlen und erhalten die Gesamtzahl der Möglichkeiten, Türme auf den Diagonalen zu platzieren:

$$\binom{4}{0}\cdot\binom{4}{2}+\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}+\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{0}=\sum_{i=1}^{2}\binom{4}{i}\cdot\binom{4-i}{2-i}=24 \qquad (36)$$

Nun muss noch die Anzahl der Möglichkeiten betrachtet werden, die vier nicht auf einer Diagonalen liegenden Türme zu setzen. Da schon in vier Zeilen/Spalten ein Turm steht und in jeder anderen Zeile/Spalte die beiden Kästchen auf der Diagonalen verboten sind, bleiben pro Zeile/Spalte ohne Turm nur noch 2 freie Kästchen. Es gibt also zu jeder der unter (36) errechneten 24 Möglichkeiten genau 2 Möglichkeiten, einen Turm zu setzen (die restlichen 3 Türme ergeben sich wieder automatisch als Partner bzgl. D1 und D2).

$$\rightarrow \text{Gesamtzahl der Möglichkeiten im Fall 1.2:} \quad 2\cdot 24=48 \qquad (37)$$

Fall 1.3.: $(k+l=0)$

Ein Beispiel hierfür ist zu Beginn des Kapitels abgebildet.

In jeder Zeile und in jeder Spalte liegen genau zwei „Diagonalenkästchen“. Diese sind in diesem Fall verboten. Folglich gibt es für die Platzierung des ersten Turms 6 Möglichkeiten (seine 3 Partner bzgl. D1 und D2 ergeben sich automatisch).

Damit stehen bereits 4 Türme auf dem Brett. Da jeweils wieder die beiden Diagonalenkästchen verboten sind, gibt es für den ersten Turm der zweiten 4-er Gruppe in jeder Zeile/Spalte ohne Turm noch 2 freie Kästchen, also zwei Möglichkeiten, einen Turm zu setzen (seine 3 Partner ergeben sich wieder automatisch).

→ Gesamtzahl der Möglichkeiten im Fall 1.3: $2 \cdot 6 = 12$ (38)

Fall 2: (symmetrisch zu D1)

Vorüberlegungen

- D1 ist Symmetrieachse. Damit muss zu jedem nicht auf D1 liegenden Turm ein symmetrischer Partner auf der anderen Seite existieren. Mathematisch folgt daraus (ähnlich wie oben): $8-k$ muss eine gerade Zahl sein. Wir erhalten somit fünf Unterfälle für *k* mit den Werte 0, 2, 4, 6, 8.

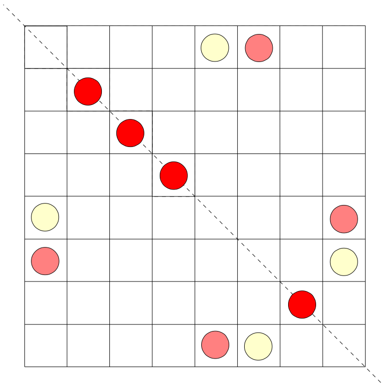
Fall 2.1: $(k=8)$

Klar, hier gibt es nur eine Möglichkeit.

Fall 2.2: $(k=6)$

Es gibt $\binom{8}{6}$ Möglichkeiten, unsere 6 Diagonalentürme zu setzen. Für die verbleibenden beiden Türme gibt es wegen unserer Vorüberlegung nur eine Möglichkeit.

Fall 2.3: $(k=4)$



Für die 4 Türme auf D1 gibt es $\binom{8}{4}$ Möglichkeiten.

Anschließend sind neben dem Diagonalenkästchen (!) in jeder Zeile/Spalte ohne Turm 4 Kästchen verboten. Es bleiben also noch $8-5=3$ freie Kästchen für den fünften Turm (und seinen Partner). Für die letzten beiden Türme gibt es dann nur noch eine Möglichkeit.

→ Möglichkeiten im Fall 2.3: $\binom{8}{4} \cdot 3 \cdot 1$

Fall 2.4: $(k=2)$

Nun gibt es nach dem Setzen der beiden Diagonalentürme noch 5 Möglichkeiten für das nächste Paar, 3 Möglichkeiten für das dritte Turmpaar und wiederum nur noch eine Möglichkeit für die letzten beiden Türme.

→ Möglichkeiten im Fall 2.4: $\binom{8}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot 1$

Fall 2.5: $(k=0)$

Die gleichen Überlegungen führen zu $\binom{8}{0}\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1$ Möglichkeiten im Fall 2.5.

Verallgemeinerung Fall 2

Befinden sich *k* Türme auf D1, sind in jeder Zeile/Spalte ohne Turm neben dem Diagonalenkästchen *k* Kästchen verboten. Somit gibt es noch $8-(k+1)=7-k$ freie Kästchen. Nach Setzen vom Turm und seinem Partner bzgl. D1 gibt es noch $5-k$ freie Kästchen. Anschließend $3-k$, usw.

$\binom{8}{8}+\binom{8}{6}\cdot 1+\binom{8}{4}\cdot 3\cdot 1+\binom{8}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot 1+\binom{8}{0}\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1$. Als Summe geschrieben:

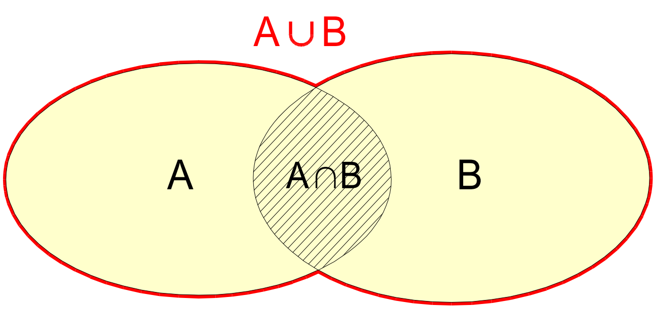
→ Möglichkeiten im Fall 2: $$1+\sum_{i=1}^{4}\binom{8}{8-2i}\cdot(2i-1)\cdot(2i-3)\cdot\ldots\cdot 1=764 \qquad (39)$$

9.3.1. Ergebnis

Mit (35), (37), (38) und (39) ergibt sich folgendes Endergebnis:

Symmetrieen bzgl. D1	764
zuzüglch Symmetrieen bzgl. D2	764
abzügl. Symmetrieen bzgl. D1 und D2	-76
Sym. bzgl. wenigstens einer Diagonalen	**1452**

Hinweis: in der obigen Tabelle findet sich etwas Mengenlehre.
Fassen wir nämlich alle Symmetrien bzgl. D1 in der Menge A zusammen und alle Symmetrien bzgl. D2 in der Menge B. Dann lässt sich die Vereinigungsmenge $A\cup B$ wie folgt grafisch darstellen (s. u. rot umrandet):



Hieraus ergiebt sich sofort die obige Rechnung, denn würde man die Elemente von A und B einfach nur zusammenzählen, erhielte man die Elemente der (schraffierten) Schnittmenge ($A\cap B$) doppelt.

9.3.2. Ausblicke:

- Wie verändert sich das Ergebnis, wenn man ein 9 x 9 (n x n) Schachbrett zu Grunde legt?
- Wie viele Läufer kann man höchstens auf einem 8 x 8 Schachbrett platzieren, so dass sie sich nicht gegenseitig bedrohen. Wie sieht es bei Damen, Königen oder Springern aus?

  (siehe hierzu: http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel/aufgaben/blatt03/index.html)