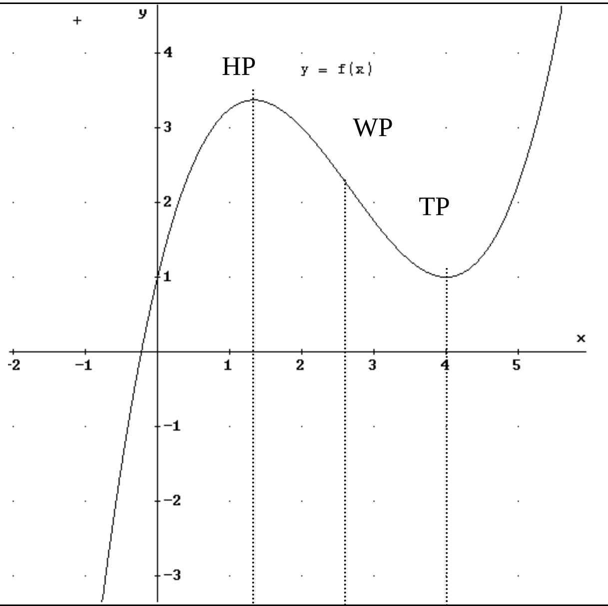
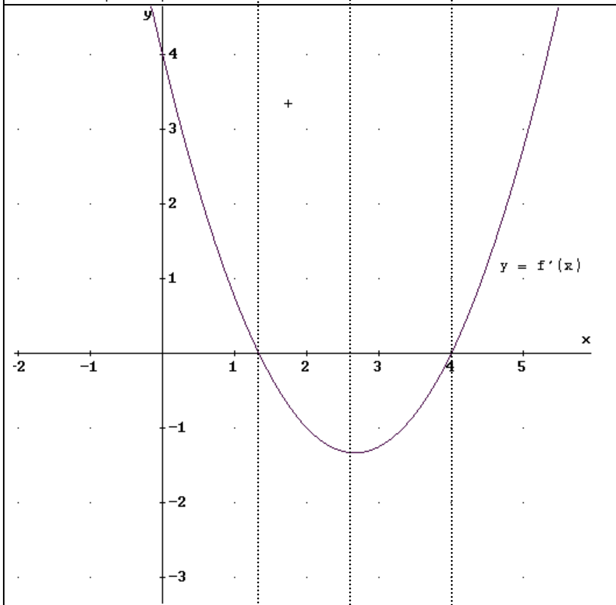


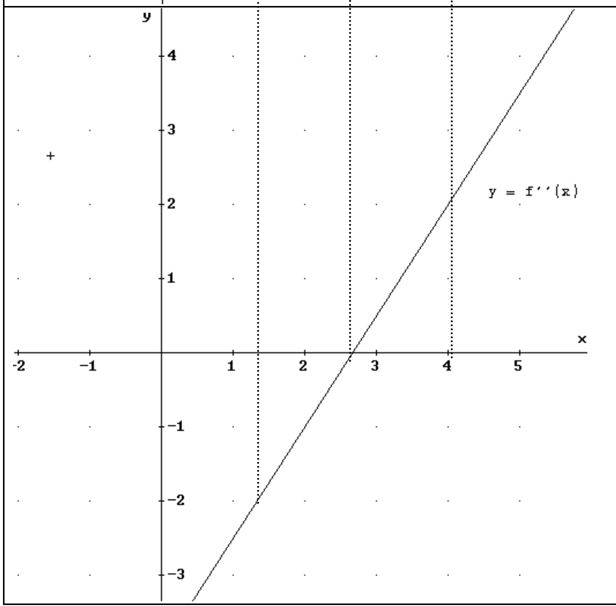
$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 4x + 1$$
$$f'(x) = \tfrac{3}{4}x^2 - 4x + 4$$
$$f''(x) = \tfrac{3}{2}x - 4$$

Berechnung der Extrempunkte (HP, TP) und des Wendepunktes (WP) mit Mitteln der sog. Kurvendiskussion:
Kriterien zur Bestimmung dieser Punkte mittels der Zusammenhänge f '' – f ' – f .



Extrempunkte:
$f'(x) = 0$ liefert Kurvenstellen mit waagrechter Tangente. Wert von f '' an diesen Waagestellen ergibt Kriterium für HP, TP:

Waagestellen	$\mathbf{x_1 = {}^4/_3}$	$\mathbf{x_2 = 4}$
Funktionswert	$f({}^4/_3) \approx 3{,}37$	$f(4) = 1$
2. Ableitung:	$f''({}^4/_3) = -2 < 0$	$f''(4) = 2 > 0$
HP / TP	**HP** $({}^4/_3 \mid {}^{91}/_{27})$	**TP** **(4 | 1)**



Wendepunkt:
$f''(x) = 0$

$x = {}^8/_3 \approx 2{,}67$

Funktionswert: $f({}^8/_3) = {}^{59}/_{27} \approx 2{,}18$

Überprüfe: ob die Nullstelle $x = {}^8/_3$ der f '' eine ungerade Ordnung hat : hier Ordnung = 1 (Begründung verbal!!)

also: WP $({}^8/_3 \mid {}^{59}/_{27}) \approx (2{,}67|2{,}18)$

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4, x \in R$	Schaubild heiße K, zeichne für x ∈ [-3; 3,5]
f ´(x) =	
f ´´(x) =	
Spezielle Symmetrien:	
$\lim_{x\to\infty} f(x) =$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$
Achsenschnittpunkte:	
y-Achse:	
x-Achse:	**Nullstellen:** N[(-2.83| 0.00); 10.83] N[(1.00| 0.00);-3.50] N[(2.83| 0.00); 5.17]
Extremstellen (HP, TP)	
f ´(x) = 0 liefert:	

x	x_1	x_2	
f(x)			
f ´´ (x)			
HP / TP			

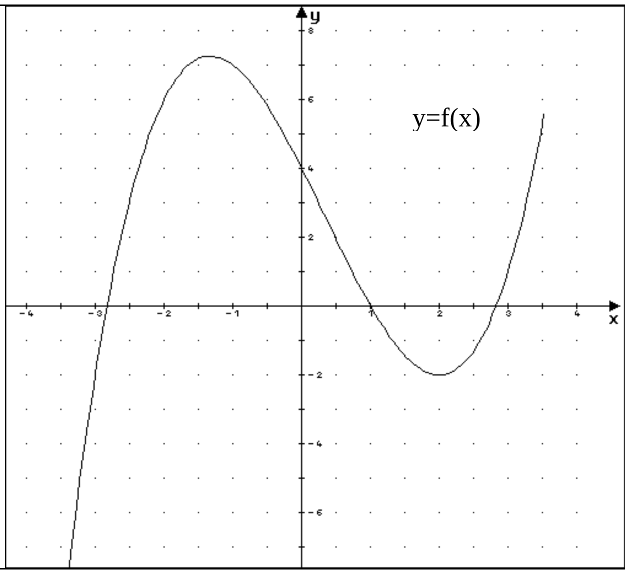
Extremwerte:

H(-1.33| 7.26)
T(2.00|-2.00)

Wendestellen (WP)	
f ´´(x) = 0 liefert:	**Wendepunkte:** W[(0.33| 2.63);-4.17]

Ergänzende Wertetabelle für x ∈ [-3;3,5]

x	f(x)
-3	-2,0
-2,5	3,1
-2	6,0
-1	7,0
1	0,0
2	-2,0
3	1,0
3,5	5,3



Am Beispiel der Funktion: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 4x + 1;\ x \in \mathrm{R}$

Sei K das Schaubild einer (2 * differenziebaren) ganzrat. Funktion f auf D_f = **R**.
Man versucht nun über die Eigenschaften der Ableitungen von f Aussagen über den Verlauf von K zu machen. Insbesondere interessiert:

> Monotonie (s.m.w. bzw. s.m.f; über f'(x) > 0 bzw. f'(x) < 0)
> Hoch-, Tiefpunkte
> Wendepunkte (Links- -> Rechtskurve und u.umgekehrt)

1.) Beschreibung der speziellen Punkte:

Hochpunkt: am Übergang von smw zu smf, Scheitel einer re Kurve, f'(x)=0
Tiefpunkt: am Übergang von smf zu smw, Scheitel einer li Kurve, f'(x)=0
Wendepunkt:am Übergang einer re-Kurve in eine li-Kurve oder umgekehrt.

2.) <u>Kriterien für das Kurvenverhalten (li-/re-Kurve):</u>

a) <u>mit f ’</u>

<u>re-Kurve</u>: unterscheide smw-Teil und smf-Teil
f ' ist abnehmend, also smf
f '(x) > 0 : re-Kurve, f ist smw.
f '(x) = 0 : f hat Hochpunkt
f '(x) < 0 : re-Kurve, f ist smf.

<u>li-Kurve</u>: unterscheide smf-Teil und smw-Teil
f ' ist zunehmend, also smw
f '(x) < 0 : li-Kurve, f ist smf.
f '(x) = 0 : f hat Tiefpunkt
f '(x) > 0 : li-Kurve, f ist smw.

Ungleichungen für f ' sind meist sehr unhandlich, deshalb versucht man mit f '' Aussagen über f ' zu machen. (analog zu Monotonieaussagen f´ $\rightarrow$ f)
f '' hat bei ganzrat. Fktn. einen um 2 kleineren Grad als f !!.

b) <u>Übergang zu f ''; f '' -> f ' -> f</u>

<u>re Kurve von f</u> -> f ' ist smf -> f ''(x) < 0
<u>li Kurve von f</u> -> f ' ist smw -> f ''(x) > 0

> Hochpunkt ist Scheitel (f '(x)=0) der re-Kurve : f ''(x) < 0
> Tiefpunkt ist Scheitel (f '(x)=0) der li-Kurve : f ''(x) > 0

> ***HP: f '(x)=0 und f ''(x) < 0*** ***TP: f '(x)=0 und f ''(x) > 0***

> Wendepunkt ist „Kurvenkrümmung – Wechselstelle“:

re-Kurve -> li-Kurve : f ''(x) < 0 -> f ''(x) > 0
li-Kurve -> re-Kurve : f ''(x) > 0 -> f ''(x) < 0

> ***WP: f ''(x)=0 und f '' wechselt a.d. Wendestelle das Vorzeichen.***
> ***d.h.: Ordnung der Nullstelle von f '' ist ungerade. Somit f´´´(x)≠0***

3.) Zusammenfassung --> Schema Kurvendiskussion. (vgl. extra Arbeitsblatt oder Formelsammlung)

Schema Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen

Ges.: Schaubild K; $y = f(x)$, $f: x \rightarrow f(x)$; f sei ganzrational.

1.) Ableitungen: f', f'', f''' bestimmen.

2.) Gibt es spezielle Symmetrien ? (zur y-Achse, zu (0|0))

3.) Verhalten für $|x| \rightarrow \infty$. (Grad(f) gerade/ungerade, $a_n > / < 0$)

4.) Achsenschnittpunkte:

a) x - Achse: (Nullstellen): $f(x) = 0$; evt. $f'(x)$ an den Nullstellen.

b) y - Achse: Bestimme $f(0)$, evt. $f'(0)$.

5.) Extremstellen: $f'(x) = 0$; $f''(x) > 0$ (TP); $f''(x) < 0$ (HP).

6.) Wendestellen: $f''(x) = 0$, Vorzeichenwechsel von f'', oder $f'''(x) \neq 0$
(d.h. Nullstelle von f'' m. ungerader Ordnung),
evt. Steigung der Wendetangente.

7.) Ergänzende Wertetabelle.

8.) Schaubild.