

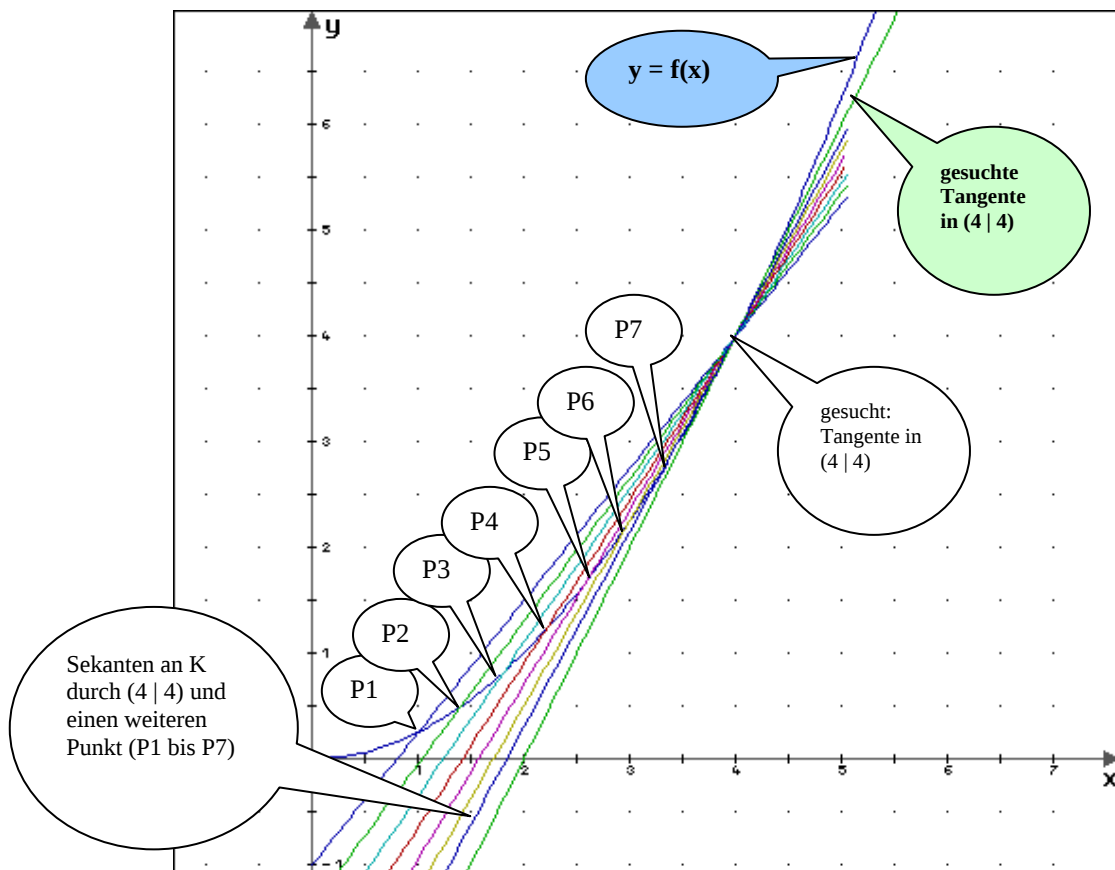
$f: x \rightarrow f(x), x \in \mathbb{R}$, ganzrationale Funktion mit Schaubild K

Aus der Analysis der Eingangsstufe (Klasse 11) ist bekannt:

- $f(x) = 0$ liefert die Nullstellen von f
- Zwischen den x-Achsen Schnittpunkten gibt es sog. „Hochpunkte“ und „Tiefpunkte“.
- Diese speziellen Punkte haben horizontale Tangenten, also die Tangentensteigung 0.
- Könnte man die Steigung von Tangenten einer Kurve K berechnen, hätte man die Möglichkeit, diese speziellen Stellen zu berechnen.

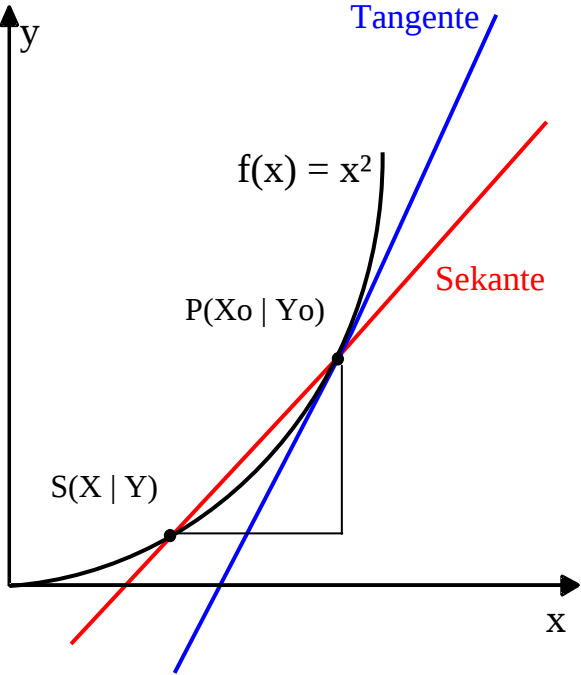
Tangenten an ganzrationale Kurven:

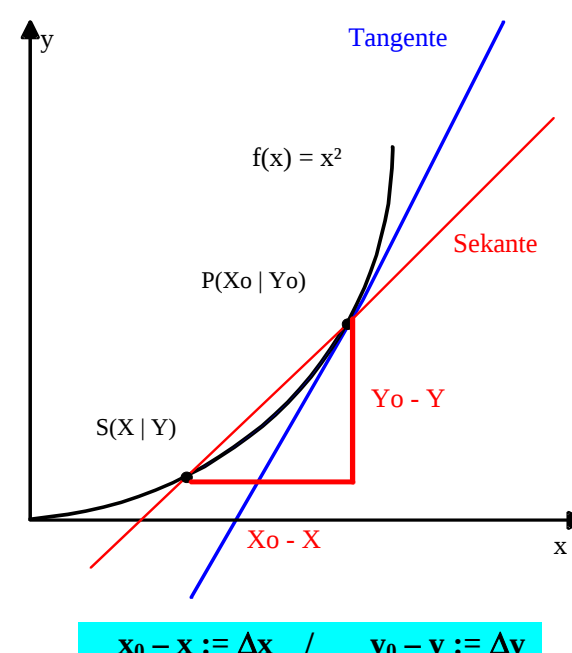
- Wie am Kreis gilt: Tangenten sind spezielle Sekanten. Nämlich solche, welche die „Kreislilie“ nur in einem Punkt berühren.
- Aus 11 ist bekannt: an doppelten Nullstellen berührt die entsprechende Kurve die x-Achse.
- Idee: über die Gleichung einer Sekante von K (Zweipunkteform) versucht man, auf die Gleichung einer Tangente zu schließen.



Beobachtungen:

1. Verändert man den einen Sekantenpunkt von P1 bis P7,.....
.....
2. Also: wandert der zweite Sekantenpunkt zum ersten (= Berührungspunkt der gesuchten Tangente),
3. **Wir wollen im Folgenden versuchen, diesen „Näherungsprozess“ von der Sekante zur Tangente rechnerisch nachzuvollziehen.**

 The graph shows a coordinate system with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. A black curve representing the function $f(x) = x^2$ starts at the origin and curves upwards. A red line, labeled 'Sekante' (secant), passes through two points on the curve. The first point is labeled $S(X Y)$. The second point is labeled $P(X_0 Y_0)$. A blue line, labeled 'Tangente' (tangent), is drawn tangent to the curve at the point $P(X_0 Y_0)$. A right-angled triangle is drawn with vertices at $S(X Y)$, $P(X_0 Y_0)$, and a point directly below $P(X_0 Y_0)$ on the x-axis, illustrating the slope of the secant line.	Sekante durch $S(x y)$, $P(x_0 y_0)$
Von der Sekante zur Tangente:	
Mathematisierung dieses Näherungsprozesses:	
Erstes Ergebnis	
Ergebnis unseres Beispiels:	
1. Anwendung:	

 Tangente Sekante f(x) = x² P(X₀ Y₀) S(X Y) Y₀ - Y X₀ - X x₀ - x := Δx / y₀ - y := Δy	Sekante durch S(x y), P(x₀ y₀) Steigung der Sekante: $m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_0 - y}{x_0 - x} = \frac{x_0^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x_0^2 - (x_0 - \Delta x)^2}{\Delta x}$ $= \frac{x_0^2 - (x_0^2 - 2\Delta x x_0 + \Delta x^2)}{\Delta x} = \frac{2\Delta x x_0 - \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 - \Delta x$ Ergebnis: Da P(x₀ y₀) und S(x y) beliebig waren, gilt: Die Sekante PS an y = x² hat die Steigung m_s = 2x₀ - Δx, wobei Δx = x₀ - x
Von der Sekante zur Tangente:	Man lässt S(x y) auf K Richtung P(x₀ y₀) wandern. d.h.: Δx = x₀ - x wird immer kleiner. also: m_t = 2x₀
Mathematisierung dieses Näherungsprozesses: Da in diesen Limes-Ausdrücken Quotienten aus Differenzen stehen, nennt man diese auch Differenzenquotient	$m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 - \Delta x) = 2x_0$ $m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x)}{\Delta x}$ $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$
Erstes Ergebnis (aus der Differentialrechnung) <u>Anm.:</u> über die Tangentensteigung in einem Punkt kommt man zur „Steigung der Kurve“ in einem Kurvenpunkt / an einer Stelle.	Die Steigung der Tangente in einem beliebigen Punkt P(x₀ y₀) einer Funktion f lässt sich berechnen als: $m_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$ (sofern dieser Grenzwert berechenbar ist / existiert).
Ergebnis unseres Beispiels:	Die Tangente an y = x² hat in jedem Punkt P(x y) die Steigung m_t = 2x
1. Anwendung: an welcher Stelle hat y = x² ihren Scheitel:	Scheitel = Stelle mit waagrechter Tangente. also: 2x = 0 ergibt x_s = 0

2. Anwendung: Steigung von

$$y = ax^2 + bx + c$$

Folgerung :

die Scheitelstelle einer beliebigen Parabel der Ordnung 2 erhält man durch Lösen von:

$$2ax + b = 0, \text{ also } x_s = -b / 2a$$

Setze in $m_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$ die

Funktionsgleichung ein:

$$\begin{aligned} m_t &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ax_0^2 + bx_0 + c - [a(x_0 - \Delta x)^2 + b(x_0 - \Delta x) + c]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ax_0^2 + bx_0 + c - [a(x_0^2 - 2x_0\Delta x + \Delta x^2) + b(x_0 - \Delta x) + c]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ax_0^2 + bx_0 + c - [ax_0^2 - 2ax_0\Delta x + a\Delta x^2 + bx_0 - b\Delta x + c]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2ax_0\Delta x - a\Delta x^2 + b\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2ax_0 - a\Delta x + b) = 2ax_0 + b \end{aligned}$$