„Tangentenprobleme“ in der Oberstufe

Eine Kreistangente trifft den Kreis in genau einem Punkt. (Die Sekante in genau zwei Punkten und die Passante in gar keinem.)

Bei einer Tangente an ein Schaubild kann diese Definition nicht übernommen werden. Stattdessen spricht man allgemein von einer Geraden, die ein Schaubild in einem bestimmten Punkt *berührt* (vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Tangente). Doch auch diese Definition ist nicht „wasserfest“, denn bei dem Schaubild der Funktion $f(x)=x^3$ schneidet die Tangente im Punkt $(0|0)$ die Kurve. Wir können somit eigentlich nicht von einem *Berühr*punkt sprechen. (Tun es aber im folgenden Text aus Gründen der Einfachheit trotzdem.)

Eine exakte Definition der Tangente erhält man mit der Ableitungsfunktion:

Definition:

Zu einem Punkt $P\left(x_P;f(x_P)\right)$ auf dem Schaubild einer Funktion *f,* ist die ***Tangente*** des Schaubildes genau diejenige Gerade durch *P* mit $f'(x_P)$ als Steigung.

Hinweis:

Aus dieser Definition erhält man sofort die Tangentengleichung. Denn verschiebt man eine Ursprungsgerade mit der Steigung $f'(x_P)$ um x_P (LE) in *x*-Richtung und um $y_P=f(x_P)$ (LE) in *y*-Richtung wird aus der ursprünglichen Proportionalität $y=f'(x_P)\cdot x$ die Gleichung der Tangente durch den Punkt *P*:

$$\boxed{t_P: y=f'(x_P)\cdot(x-x_P)+f(x_P)}$$

Das zweite (etwas kompliziertere) Tangentenproblem:

In Analogie zum Kreis, kann auch bei einem Schaubild eine Tangente (oder mehrere Tangenten) zu einem Punkt *P* gesucht sein, wobei *P* dieses Mal nicht der Berührpunkt zwischen Schaubild und Tangente ist.

In der Regel ist aus dem Schaubild nicht zu erkennen, an welcher Stelle der Berührpunkt liegt, bzw. ob solch ein Punkt überhaupt existiert.

Zur Lösung eines solchen Problems können die folgenden Lösungsverfahren herangezogen werden:

Standard-Lösungsverfahren:

1. Wähle einen (zunächst variablen) Berührpunkt $U\left(u\,|\,f(u)\right)$ auf dem Schaubild von *f*.
2. Zu *U* lässt sich nach dem obigen Hinweis sofort die Gleichung der Tangenten bestimmen: $t_U: y=f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$

3. Da diese Tangente so gewählt werden muss, dass sie durch P verläuft, müssen die Koordinaten von P die Gleichung erfüllen. Dies liefert eine Gleichung mit nur einer Unbekannten → dem x-Wert von U, also u.
4. Bei komplizierteren Gleichungen sollte aus Zeitgründen zur Lösung der Gleichung der Taschenrechner herangezogen werden.
5. ***Achtung:*** In der Regel muss das Ergebnis noch interpretiert werden. Wenn mehrere Lösungen existieren, ist oftmals nur eine davon sinnvoll.

Alternativ-Lösungsverfahren:

1. Wieder sei $U(u\,|\,f(u))$ der (zunächst variable) Berührpunkt.
2. Mit den Koordinaten von U und P lässt sich zur Geraden *(UP)* die (ebenfalls variable) Sekantensteigung m_{UP} beschreiben:

$$m_{UP}=\frac{y_P-y_U}{x_P-x_U}=\frac{y_P-f(u)}{x_P-u}$$

3. Wenn *(UP)* die gesuchte Tangente durch U und P ist, muss diese Sekantensteigung der Tangentensteigung $f'(u)$ entsprechen.
   Auch die Gleichung $m_{UP}=f'(u)$ besitzt u als einzige Unbekannte und lässt sich leicht lösen.

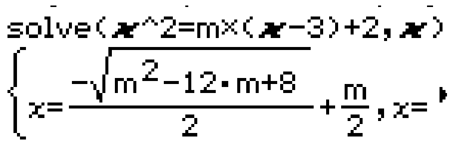
Alternativ-Lösungsverfahren 2 (mit CAS):

Wenn sichergestellt ist, dass eine Sekante das Schaubild nur in zwei Punkten schneidet, liefert ein CAS-Rechner (Computer-Algebra-System) ein weiteres Lösungsverfahren. Ohne CAS ist dieser Weg nicht zu empfehlen. Der Rechenaufwand ist unter Umständen gewaltig – insbesondere bei gebrochen rationalen Funktionen.

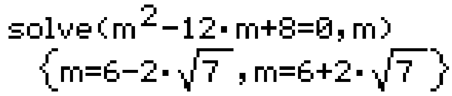
1. Beschreibe die Gleichung aller Geraden durch P als Funktionenschar mit der Steigung m als Scharparameter.

$$t_m: y=m\cdot(x-x_P)+y_P$$

2. Setzte die rechte Seite dieser Gleichung mit der Funktionsgleichung gleich und löse nach x auf. Der Rechner liefert Lösungen für x in Abhängigkeit von m.



3. Nur bei den Tangenten darf es eine eindeutige Lösung geben. Dies „erzwingen“ wir bei den Lösungen von 2. mit der richtigen Wahl der Steigung m.



4. Meist ergibt diese Rechnung verschiedene Werte für m, so dass mehrere Tangenten existieren. Falls die Lösungen bei 2. unsinnig sind, existieren keine Tangenten. (Beispielsweise könnte der Punkt P innerhalb einer Parabel liegen.)