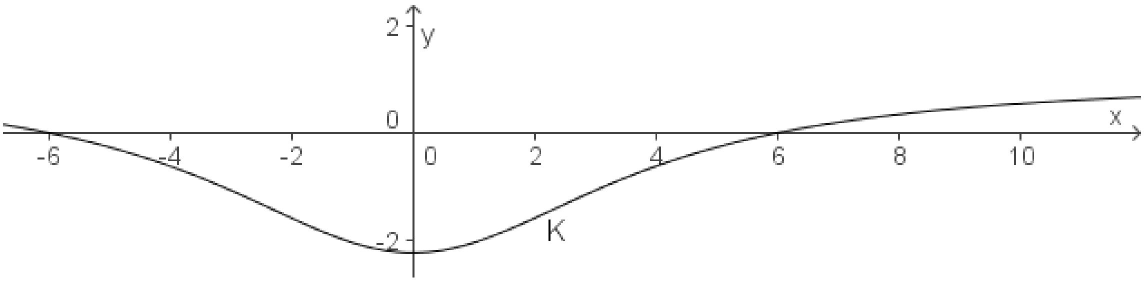
Abituraufgabe (2004)

Wahlteil Analysis 1, Aufgabenteil c)

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x)=\frac{x^2-36}{x^2+16}$; $x\in\mathbb{R}$ mit dem zugehörigen Schaubild K.



Das Schaubild K stellt für $-6\le x\le 6$ den Querschnitt eines 500 m langen Kanals dar (x und f(x) in Meter). Die sich anschließende Landfläche liegt auf der Höhe $y=0$. Der Pegelstand wird in Bezug auf den tiefsten Punkt des Kanals gemessen und beträgt maximal 2,25 m.

An Land steht eine Person. In welcher Entfernung vom Kanalrand darf sie höchstens stehen, damit sie bei leerem Kanal die tiefste Stelle des Kanals sehen kann (Augenhöhe 1,50 m)?

Standard-Lösung:

1. Sei $U(u\,|\,f(u))$ der (zunächst variable) Berührpunkt auf dem Schaubild von *f*.
2. Zu *U* bestimmen wir die Gleichung der Tangenten:
$$t_U: y=f'(u)\cdot(x-u)+f(u)=\frac{104\cdot u}{\left(u^2+16\right)^2}\cdot(x-u)+\frac{u^2-36}{u^2+16}$$
3. Damit diese Tangente die tiefste Stelle des Kanals „trifft“, muss der Punkt $P(0\,|\,-2{,}25)$ die Tangentengleichung erfüllen. Dieser Gedankengang liefert die folgende Gleichung:
$$\begin{aligned}-2{,}25 &= \frac{104\,u}{\left(u^2+16\right)^2}\cdot(0-u)+\frac{u^2-36}{u^2+16}\\ -2{,}25 &= \frac{-104\,u^2}{\left(u^2+16\right)^2}+\frac{u^2-36}{u^2+16}\end{aligned}$$
4. Geben wir die beiden Seiten der Gleichung jeweils als Funktion in den GTR ein, berechnet dieser den Schnittpunkt der beiden Schaubilder. (Dass wir beim GTR anstatt *u* die Funktionsvariable *x* eingeben müssen, sollte keine Schwierigkeiten bereiten.) Die Lösungen der obigen Gleichung lauten 0 und ± 4, wobei sich die Lösung $u_1=+4$ und $u_2=-4$ aus Symmetriegründen entsprechen.

Damit ergibt sich für die Tangentengleichung (2.) die Darstellung:

$t_U: y = \frac{104 \cdot 4}{(16+16)^2} \cdot (x-4) + \frac{16-36}{16+16}$. Diese Geradengleichung beschreibt die Blickrichtung. Wir setzen setzen sie gleich mit der Gleichung $y=1{,}5$ (Augenhöhe). Mit Hilfe des GTRs berechnen wir den Schnittpunkt der beiden Geraden. Als Ergebnis erhalten wir ca. 9,23.

Lösung:

Der Abstand vom Kanalrand beträgt somit $(9{,}23-6)m = 3{,}23m$.

Alternativ-Lösung:

1. Wir wählen den variablen Punkt $U(u \mid f(u))$ wie oben.
2. Wieder soll die spätere Tangente durch den Punkt $P(0 \mid -2{,}25)$ gehen. Dies liefert die Sekantensteigung m_{UP} zur Geraden *(UP)*:
$$m_{UP} = \frac{-2{,}25 - \frac{u^2-36}{u^2+16}}{0-u}$$
3. Damit diese Gerade eine Tangenten durch U bildet, fordern wir die Gleichheit $m_{UP} = f'(u)$. Einsetzen der Terme führt zur folgenden Gleichung, die wir mit dem GTR grafisch lösen (und somit u bestimmen):
$$\frac{2{,}25 + \frac{u^2-36}{u^2+16}}{u} = \frac{104u}{(u^2+16)^2}$$
4. Es ergeben sich die gleichen Lösungen wie bei der Standard-Lösung (unter 4.). Der Rest der Lösung verläuft exakt wie oben beschrieben.

Alternativ-Lösung 2 (mit Computer-Algebra-System)

1. Wir bilden aus den möglichen Geraden durch den Punkt $P(0 \mid -2{,}25)$ eine Geradenschar: $t_m: y = m \cdot (x) - 2{,}25$
2. Diese Gerade setzten wir mit der Funktion f gleich und lösen nach x auf. Wir erhalten die Lösungen $(x_1 = 0); x_{2/3} = \frac{13}{8m} \pm \frac{\sqrt{169-1024m^2}}{8m}$.
3. Nur wenn die Wurzel bei den Lösungen $x_{2/3}$ null ergibt, handelt es sich bei m um die Steigung der gesuchten Gerade(n). Dies ist für $m = \pm\frac{13}{32}$ der Fall.
4. Diese Werte für m ergeben (mit 1.) die „günstigen“ Tangenten. Wieder können wir deren Gleichung (wie beim letzten Schritt der Standard-Lösung) mit $y=1{,}5$ gleichsetzten. → $x_{4/5} = \pm\frac{120}{13} \approx \pm 9{,}23$.