

# Die eulersche Zahl $e \approx 2.71828182845904 \dots$

Unbestritten ist die (Kreis-)Zahl  $\pi$  der „Star“ aller reellen Zahlen. Allerdings muss sich die eulersche Zahl in keiner Weise dahinter verstecken.



## I. Verschiedene Definitionsmöglichkeiten

### 1. Grenzwert bei „momentaner Verzinsung“

Wir nehmen an, eine Bank gewähre 100% Zinsen pro Jahr. Bei jährlicher Zinszahlung hätte dies eine Verdoppelung des Anfangskapitals (AK) zur Folge. Bei halbjährlicher (vierteljährlicher, ...) Zinszahlung erhöht sich das Guthaben nach einem Jahr aufgrund des Zinseszinses.

Überraschenderweise wächst das Kapital nach einem Jahr auch durch noch so viele Zinstermine nicht beliebig.

Wir vergleichen hierzu die Kapitalentwicklung von 1€ nach einem Jahr bei einer Verzinsung von 100% p. a.:

eine Zinszahlung:	$1\text{€} + 100\% \cdot 1\text{€} = 1\text{€} \cdot (1+1)$	= 2,00€
zwei Zinszahlungen:	$1\text{€} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$	= 2,25€
vier Zinszahlungen:	$1\text{€} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$	= 2,44€
12 Zinszahlungen:	$1\text{€} \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12}$	= 2,61€
100 Zinszahlungen:	$1\text{€} \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$	= 2,70€
1000 Zinszahlungen:	$1\text{€} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.000}\right)^{1.000}$	= 2,72€
10000 Zinszahlungen:	$1\text{€} \cdot \left(1 + \frac{1}{10.000}\right)^{10.000}$	= 2,72€

Die Potenzen führen zur eulerschen Zahl als Grenzwert:  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

### 2. Lokale Änderungsrate gleich Funktionswert $f'(x) = f(x)$

Beim exponentiellen Wachstum ist die Änderungsrate proportional zum alten Bestand:  $f'(t) = k \cdot f(t)$ . Gesucht ist eine Funktion, bei der die Proportionalitätskonstante gleich 1 ist.

Für jede Exponentialfunktion  $f(x) = a^x$  gilt:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h} = a^x \cdot f'(0)$$

Mittels Intervallschachtelung findet man bei sehr kleinen Zahlen für  $h$  mit dem Ausdruck  $\frac{a^h - 1}{h}$  einen Näherungswert für  $e$  (als Basis der gesuchten Funktion).

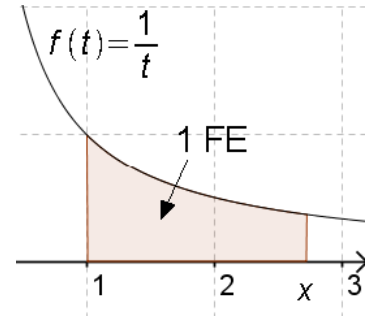
### 3. Fläche unter dem Schaubild der Kehrwertfunktion

Gesucht ist die Zahl  $x$ , bei der die Integralfunktion

$$F_1(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \text{den Wert 1 liefert.}$$

Mit der Stammfunktion der Kehrwertfunktion können wir das Integral berechnen:

$$F_1(x) = [\ln t]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x - 0$$



$\ln a$  ist die Hochzahl Exponentialgleichung  $e^? = a$ . Unsere Forderung

$$\boxed{\ln x = 1} \quad \text{entspricht somit der Gleichung} \quad \boxed{e^1 = x}.$$

### 4. Darstellung als Taylor-Reihe (für Interessierte)

Die  $e$ -Funktion kann man durch eine sog. **Taylor-Reihe** darstellen:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \left( = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \rightarrow \text{mit } x=1 \text{ erhält man hier den Wert für } e.$$

## II. Interessantes am Rande:

Taylor-Reihen gibt es auch bei den trig. Funktionen  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$ :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \mp \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \mp \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Oberflächlich betrachtet scheint es einen Zusammenhang zwischen  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  und  $e^x$  zu geben. Probleme machen allerdings die Subtraktionen der beiden trigonometrischen Funktionen.

Die Verbindung von  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  mit der  $e$ -Funktion gelingt mit einer „neuen Zahl“ - der **imaginären Einheit  $i$** . Für  $i$  gilt  $i^2 = -1 \rightarrow i^4 = 1$ .

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)}.$$

Diese Formel beschreibt die Kreislinie des Einheitskreises in der „**komplexen Zahlenebene**“.

Setzt man nun noch für  $x$  die Kreiszahl  $\pi$  ein, erhält man eine Formel die auf beeindruckende Weise alle bedeutenden Zahlen in der Mathematik vereint:

$$\boxed{e^{i\pi} = -1 \text{ bzw. } 1 + e^{i\pi} = 0}.$$

