Funktionenschar mit e-Funktion / Ortskurve der Wendepunkte

Gegeben ist eine Funktionenschar mit $f_k(x)=\left(k-e^x\right)^2;\ k>0$.

1. *Skizziere den Verlauf der Funktion für $k=1$.*
2. *Welche Eigenschaften besitzen die Schaubilder dieser Funktionenschar. Weise nach, dass die Schaubilder für jedes k genau einen Tiefpunkt besitzen.*
3. *Bestimme die Ortskurve der Wendepunkte.*

Tipps zu 2:

- Symmetrie, Monotonie (behandle zunächst die Extrempunkte.)
- Verhalten für $x\to\pm\infty$ (Stelle den Funktionsterm als Summe dar – das erleichtert die Vorstellung beim Verlauf des Schaubildes.) Asymptoten?
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen? Die Nullstellenbestimmung vereinfacht sich deutlich mit $x^2=0 \ \Leftrightarrow x=0$.
- Extrempunkte?
- Wendepunkte?

Tipps zu 3:

- ***Achtung:*** der Parameter k wird beim Ableiten als Konstante behandelt.
- Beachte: Für den Nachweis eines Wendepunktes genügt eine Nullstelle der zweiten Ableitung nicht!

Kontrolle für die Lösungen:

$$f'_k(x)=2e^{2x}-2ke^x=2e^x\left(e^x-k\right) \qquad f''_k(x)=4e^{2x}-2ke^x=2e^x\left(2e^x-k\right)$$

Ein Wendepunkt besitzen die Koordinaten: $x=ln\left(\frac{k}{2}\right)$ und $y=f\left(ln\left(\frac{k}{2}\right)\right)=\frac{k^2}{4}$.

Das solltest du dir merken:

- Das Schaubild von $h(x)=a\cdot e^x;\ a>0$ liegt oberhalb der x-Achse und hat für $x\to-\infty$ die x-Achse als waagerechte Asymptote. Damit besitzen Funktionen vom Typ $h(x)=a\cdot e^x-k;\ a>0;k>0$ aufgrund einer „Verschiebung um k in negative y-Richtung“ genau eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel.
- Zur Bestimmung der Ortskurve löse den x-Wert nach dem Parameter auf und setze ihn in den Parameter des y-Wertes ein.
(Hier: $k=2\cdot e^x$ $\to$ Ortskurve der Wendepunkte: $y=e^{2x}$)
- Für $k<0$ gibt es hier keine Extrem- und Wendepunkte. Warum?