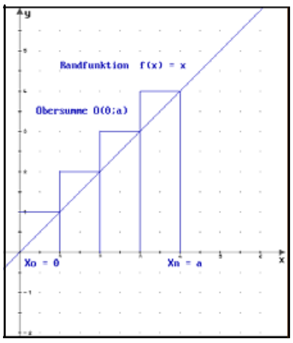
Flächenberechnung mit Hilfe von Ober - und Untersummen
Fläche als bestimmtes Integral

Ober- und Untersummen bilden eine Intervallschachtelung für den tatsächlichen Flächeninhalt.

Daher gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}(O_{[a;b]}) = \lim\limits_{n\to\infty}(U_{[a;b]}) = A_a(b)$

Wir betrachten nur die Folge der Obersummen und vereinfachen ferner durch die Wahl geeigneter Randfunktionen über dem Intervall [0;a].



Teile [0;a] in n gleiche Streifen der Breite Δx = h = (a-0)/n = a/n
Dies ergibt n+1 Teilpunkte:
$x_0=0$, $x_1=0+h$; $x_2=0+2h$; $x_3=0+3h$; ...; $x_{n-1}=0+(n-1)h$; $x_n = a$
$O_{[0;a]}$ = Summe aller Streifenflächen
= Summe(Breite*Höhe)
= Summe(Breite*rechter Funktionswert)

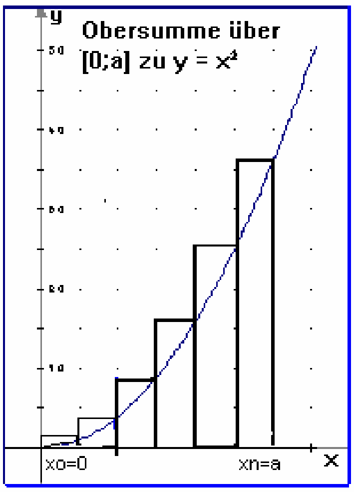
$$= h\cdot f(x_1) + h\cdot f(x_2) + ... + h\cdot f(x_n) = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

$$= h\cdot(1\cdot h + 2\cdot h + ... + n\cdot h) = h^2\cdot(1+2+3+...+n)$$

$$= \frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$

Läßt man nun n gegen ∞ gehen, nähert sich $O_{[0;a]}$ der tatsächlichen Fläche unter y=x von 0 bis a an. Es gilt somit:

$$A_0(a) = \lim_{n\to\infty}(O_{[0;a]}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \mathbf{\frac{a^2}{2}}$$



Teile [0;a] in n gleiche Streifen der Breite h = (a-0)/n = a/n
Dies ergibt n+1 Teilpunkte:
$x_0=0$, $x_1=0+h$; $x_2=0+2h$; $x_3=0+3h$; ...; $x_{n-1}=0+(n-1)h$; $x_n = a$
$O_{[0;a]}$ = Summe aller Streifenflächen
= Summe (Breite*Höhe)
= Summe (Breite*rechter Funktionswert)

$$= h\cdot f(x_1) + h\cdot f(x_2) + ... + h\cdot f(x_n) = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

$$= h\cdot((1\cdot h)^2 + (2\cdot h)^2 + ... + (n\cdot h)^2) = h^3(1+4+...+n^2)$$

$$= \frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$= a^3\cdot\frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{a^3}{3}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{2n^2}$$

Lässt man nun n gegen ∞ gehen, nähert sich $O_{[0;a]}$ der tatsächlichen Fläche unter $y=x^2$ von 0 bis a an. Es gilt somit:

$$A_0(a) = \lim_{n\to\infty}(O_{[0;a]}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^3}{3}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{2n^2}\right) = \mathbf{\frac{a^3}{3}}$$

Zusammenhang zwischen Randfunktion und „Flächeninhaltsfunktion“: Diese bestimmt für jedes a > 0 den Inhalt der Fläche unter der Randfunktion über dem Intervall [0;a].

Gleichung der Randfunktion	Flächeninhaltsfunktion
f(x) = x	$\frac{1}{2} a^2$
f(x) = x^2	$^1/_3\ a^3$
f(x) = x^3	$^1/_4\ a^4$
f(x) = x^n	$^1/_{(n+1)}\ a^{(n+1)}$

Zusammenhang zwischen Randfunktion und Flächeninhaltsfunktion:

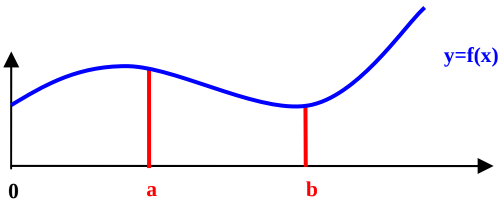
Die Flächeninhaltsfunktion der Fläche unter der Randfunktion über [0;a] ist eine „geeignete“ Stammfunktion dieser Randfunktion.

Def.: Ist F die einfachste Stammfunktion der in [a;b] stetigen Randfunktion f mit f(x) ≥ 0, dann gilt für den Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild von f und der x-Achse über [a;b] :

(beachte Intervall [0;a]) **$A_0(a) = F(a)$**

Man erkennt leicht, daß für 0 ≤ a < b gilt:

Additivität von Flächen!



$A_a(b) = A_0(b) - A_0(a) = F(b) - F(a)$ (Hauptsatz für Flächeninhalte) (0 ≤ a < b)

Anm.: „Stammfunktion bilden“ ist die Umkehrung von „Ableiten“. Jedoch ist dieser Vorgang nicht eindeutig.

Funktion f	Stammfunktion F
x	$\frac{1}{2} x^2 + c$
x^2	$^1/_3\ x^3 + c$
x^3	$^1/_4\ x^4 + c$
x^n	$^1/_{(n+1)}\ x^{(n+1)} + c$
m ∈ R	mx + c
„AUFLEITEN“ ist mehrdeutig →	**← „ABLEITEN“ ist eindeutig**

Flächeninhalt als Integral:

Oben dargestellte Zusammenhänge ergeben folgendes Ergebnis:

$A_a(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$; lies: Integral f(x) dx von a bis b.

Dabei heißt f(x) der ***Integrand*** und x ist die ***Integrationsvariable***.

Anm: das ∫-Zeichen wurde hergeleitet vom ∑-Zeichen der Obersumme, aus dem Δx wurde das dx.

Beispiel: $\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{3}\left(3^3 - 1^3\right) = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3} \approx 8{,}67[FE]$

Integral / Stammfunktion / Wert(Obergrenze) – Wert(Untergrenze)