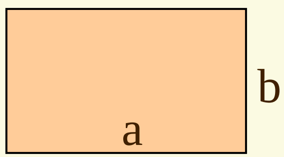
Flächenberechnung

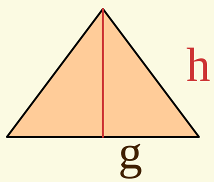
- Geradlinig begrenzte Flächen
- Krummlinige Trapeze
- Flächeninhaltsfunktion zur Randfunktion

Geradlinig begrenzte Flächen (aus der Mittelstufe)

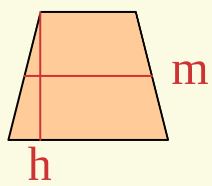
Standardfiguren



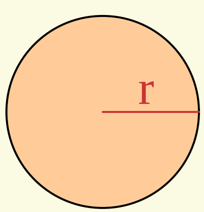
$A = ab$



$A = {}^{1}/_{2}gh$

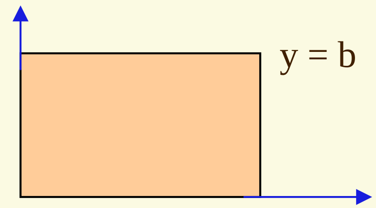


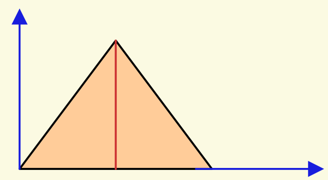
$A = mh$



$A = \pi r^2$

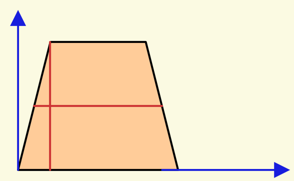
Standardfiguren im Koordinatensystem



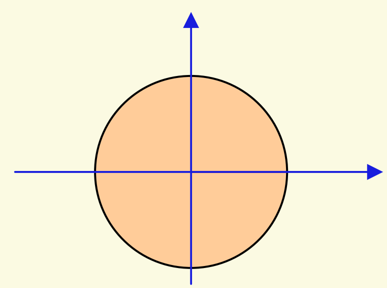


Zerlege das Dreieck in zwei symmetrische Teile.

Randfunktion ist y = mx

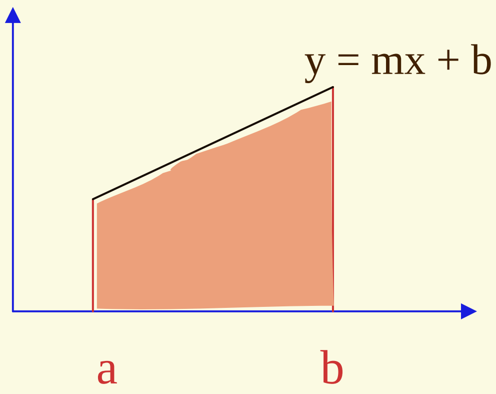


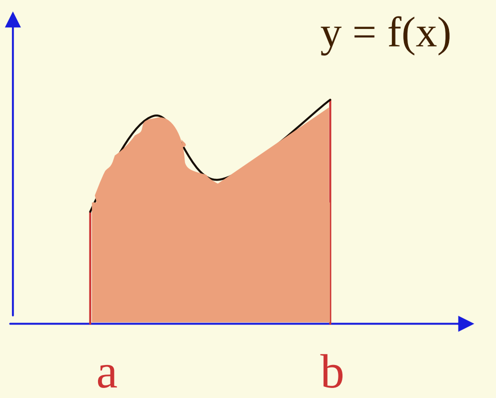
Verfahre ähnlich wie beim Dreieck



Randfunktion ist „oberer“ Halbkreis

Krummlinige Trapeze



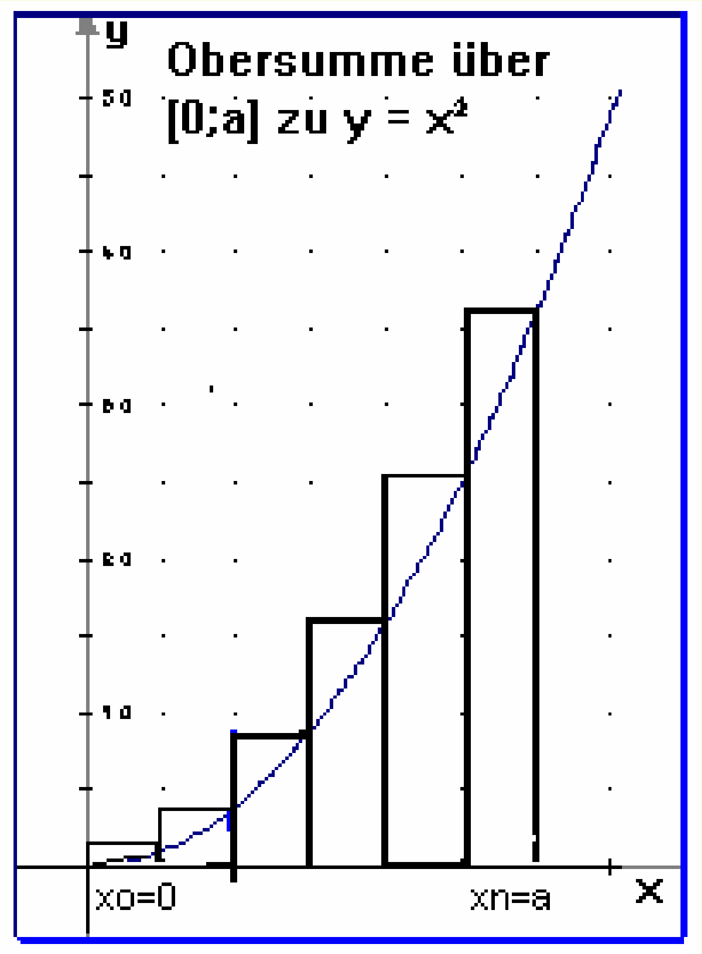


- ☞ Eine auf [a;b] positive (nicht negative!!) Randfunktion,
- ☞ die x-Achse
- ☞ und die Geraden **x = a** sowie **x = b**

begrenzen ein krummlinig begrenztes Flächenstück

sog. krummliniges Trapez.

Annäherung des Flächeninhaltes durch Unter- und Obersumme



- Ist die Randfunktion „krummlinig“, so versucht man den Flächeninhalt durch Rechtecksäulen anzunähern.
- Bei genügender Verfeinerung läßt sich dieser Flächeninhalt immer genauer bestimmen.
- Schließlich gelingt es, eine sogenannte FLÄCHENINHALTSFUNKTION anzugeben.
- Man versucht ferner, einen rechnerischen Zusammenhang zwischen der **Randfunktion** und der **Flächeninhaltsfunktion** herzustellen.

Annäherung des Flächeninhaltes durch Unter- und Obersumme

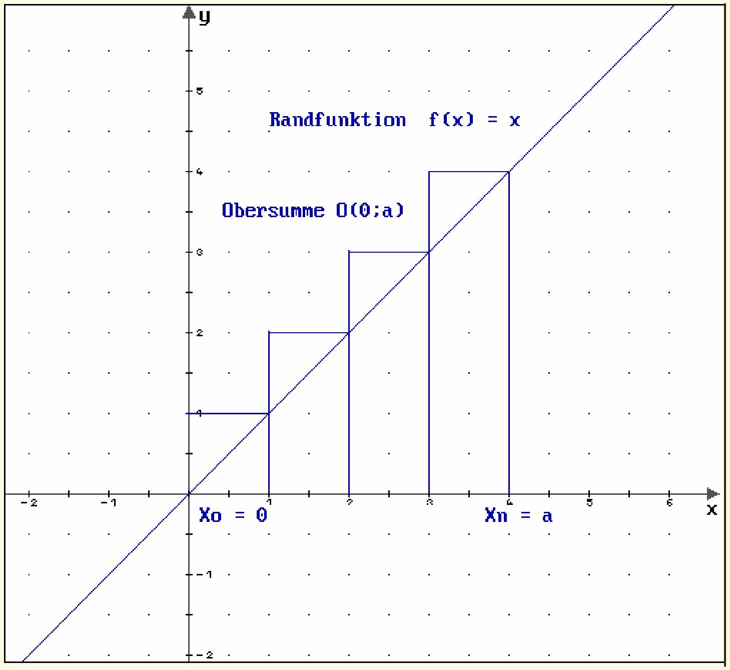
Ober- und Untersummen bilden eine Intervallschachtelung für den tatsächlichen Flächeninhalt $A_a(b)$

Daher gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(O_{[a;b]}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(U_{[a;b]}\right)=A_a(b)$$

Wir betrachten nur die Folge der Obersummen und vereinfachen ferner durch die Wahl geeigneter positiver Randfunktionen über dem Intervall [0;a].

Flächeninhalt zur Randfunktion f(x) = x



Teile [0;a] in n gleiche Streifen der Breite
h = (a-0)/n = a/n

Dies ergibt n+1 Teilpunkte:
$x_0=0$, $x_1=0+h$; $x_2=0+2h$; $x_3=0+3h$; …;
$x_{n-1}=0+(n-1)h$; $x_n = a$

$O_{[0;a]}$ = Summe aller Streifenflächen
= Summe(Breite*Höhe)
= Summe(Breite*rechter Funktionswert)

$$= h\cdot f(x_1)+h\cdot f(x_2)+\ldots+h\cdot f(x_n)=\sum_{i=1}^{i=n} h\cdot f(x_i)$$

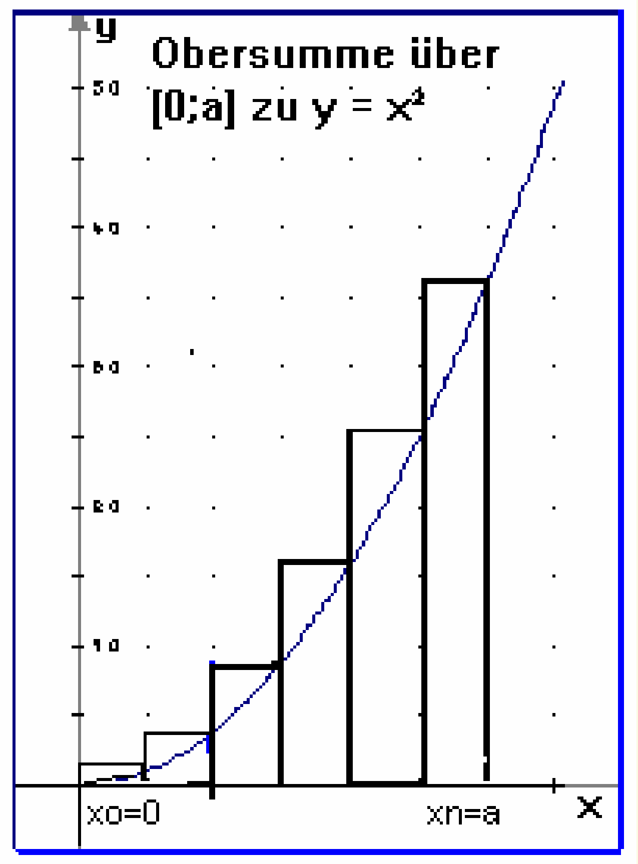
$$= h\cdot(1\cdot h+2\cdot h+\ldots+n\cdot h)=h^2\cdot(1+2+3+\ldots+n)$$

$$= \frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$

Lässt man nun n gegen ∞ gehen, nähert sich $O_{[0;a]}$ der tatsächlichen Fläche unter y=x von 0 bis a an. Es gilt somit

$$A_0(a)=\lim_{n\to\infty}(O_{[0;a]})=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\mathbf{\frac{a^2}{2}}$$

Flächeninhalt zur Randfunktion f(x) = x^2



Teile [0;a] in n gleiche Streifen der Breite h = (a-0)/n = a/n . Dies ergibt n+1 Teilpunkte:

x_0=0, x_1=0+h; x_2=0+2h; x_3=0+3h; ...;
x_{n-1}=0+(n-1)h; x_n = a

$O_{[0;a]}$ = Summe aller Streifenflächen
= Summe (Breite * Höhe)
= Summe (Breite * rechter Funktionswert)

$$= h\cdot f(x_1) + h\cdot f(x_2) + \ldots + h\cdot f(x_n) = \sum_{i=1}^{i=n} h\cdot f(x_i)$$

$$= h\cdot((1\cdot h)^2 + (2\cdot h)^2 + \ldots + (n\cdot h)^2) = h^3(1+4+\ldots+n^2)$$

$$= \frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$= a^3\cdot\frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{a^3}{3}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{2n^2}$$

Lässt man nun n gegen ∞ gehen, nähert sich $O_{[0;a]}$ der tatsächlichen Fläche unter y=x^2 von 0 bis a an. Es gilt:

$$A_0(a) = \lim_{n\to\infty}(O_{[0;a]}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^3}{3}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{2n^2}\right) = \boldsymbol{\frac{a^3}{3}}$$