Wer fürchtet sich vorm Integral?

Die Beantwortung der Frage, ob man wohl von einem Differentialquotienten auch wieder zurück zu der ursprünglichen Funktion kommt, scheint auf den ersten Blick unmöglich, denn die ganze Geschichte ist einigermaßen undurchsichtig. Man muss sich aufs Probieren und Herumraten verlegen, wenn man es jetzt weiterbringen will. Aber wir haben ja schon einiges gelernt, und so muss uns die **Umkehrung** der bisher behandelten Aufgabe — und wie klar ersichtlich, handelt es sich ja auch um nichts anderes — doch auch gelingen.

Jetzt heißt es natürlich, etwas aufpassen! — Wenn jemand kommt und sagt, der Differentialquotient in einem bestimmten Punkt einer Kurve ist gleich vier, dann können wir damit überhaupt nichts anfangen. Wir können uns drehen und wenden, wir kommen nicht einen einzigen Schritt weiter. Der Betreffende muss uns schon noch verraten, ob und wie der Differentialquotient von x abhängt. Sonst ist die ganze Aufgabe sinnlos! Wir wollen deshalb auch nicht weiter darauf eingehen, sondern nehmen in jedem Fall an, dass diese Voraussetzung erfüllt ist.

Die Aufgabe, suche aus dem Differentialquotienten 4 die Funktion, hat nunmehr einen Sinn. In diesem Fall können wir sofort darauf schließen, dass es sich nur um eine lineare Funktion handeln kann. Nur diese hat einen konstanten, von x unabhängigen Differentialquotienten. Wir wissen also schon so etwa, was herauskommen wird. Das soll uns aber nicht davon abhalten, dieses erste, einfache Beispiel besonders ausführlich zu behandeln. Packen wir also unseren Differentialquotienten ein wenig schärfer an, wobei wir uns der etwas komplizierteren Schreibweise des Differentialquotienten mit $\frac{dy}{dx}$ befleißigen.

Der Differentialquotient der gesuchten Funktion ist 4, das schreiben wir auf:

$$\frac{dy}{dx}=4$$

Wir steuern nun auf die Lösung, auf die ursprüngliche Funktionsgleichung zu, und zwar wollen wir sie in der Form haben, dass sie, wie gewohnt, beginne mit: y = soundso viel ...

Nun arbeiten wir aber nicht mehr mit y allein, sondern auch mit dem verschwindenden, schier unendlich kleinen *dy.* Also müssen wir bei dem Suchen unserer Funktion damit beginnen, dass wir dy = ... aufschreiben. Frage: Was ist aber jetzt aus dem armen dx geworden, wo ist es hin? Nun, wir haben es dadurch aus der ersten Hälfte unserer begonnenen Gleichung zum Verschwinden gebracht, dass wir diese mit dx multiplizierten. Bei einer Gleichung ist nun alles gestattet, wenn man es nur auf beiden Seiten tut. Also müssen wir jetzt gerechterweise auch die andere Seite unserer Gleichung mit dx multiplizieren. Wir müssen demnach richtig schreiben: $dy=4\cdot dx$ (sprich: De-Ypsilon gleich 4 De-Iks).

Aus: „***Im Zaubergarten der Mathematik***“ von Alexander Niklitschek, 1938

Jetzt ist noch der Name für die neu gefundene Rechenoperation, nämlich das Suchen der Funktion aus dem Differentialquotienten, einzuführen. Man nennt sie „**INTEGRIEREN**“, und den Befehl „Suche aus diesem Differentialquotienten die dazugehörige Funktionsgleichung!“ schreibt man so, dass man vor die Differentiale *dy* und *dx* das

INTEGRALZEICHEN $\int$

setzt.

Und so ergibt sich eine Niederschrift unserer Rechnung in folgender Form:

$$\int dy = \int 4 \cdot dx$$

In Worten ausgedrückt: Das Integral von De-Ypsilon ist gleich Integral von vier De-Iks!

Nun rechnen wir aus, und es ergibt sich **zunächst** aus der Tatsache, dass ja nur eine **lineare** Funktion herauskommen kann,

$$\int dy = y ; \qquad \int 4\,dx = 4\,x .$$

Aber damit sind wir noch nicht fertig; denn, wie wir schon wissen, kann ja neben der das x enthaltenden Zahlenangabe noch eine weitere nicht mit x verquickte Zahl bei der Funktion gewesen sein. Diese Zahl können wir vorläufig nicht finden. Aber die Möglichkeit ihrer Existenz müssen wir wenigstens zugeben. Und wir setzen für jenes Glied der vorhanden gewesenen Funktionsgleichung, das beim Differenzieren „in den Brunnen gefallen“ sein könnte, eine unbestimmte Konstante, ***Integrationskonstante*** geheißen, die mit C bezeichnet wird. So ergibt sich endlich die genaue Formel:

$$y = \int 4\,dx = 4\,x + C .$$

So! Und damit sind wir endlich so weit und haben die erste Integralrechnung glorreich beendet und auch — zwar etwas schwerfällig für den hier vorliegenden einfachen Zweck — „zunftgemäß richtig“ aufgeschrieben.

Diese verflixte Integrationskonstante C — die natürlich auch eine negative Zahl sein kann — bleibt unbestimmt. Sie darf aber keineswegs weggelassen werden, da sie in den Anwendungen i. A. eine besondere Bedeutung hat, die sich aus der jeweiligen Aufgabenstellung ergibt.

Geht z. B. aus der Aufgabe hervor, dass die Gerade durch den Punkt mit den Koordinaten $x=1$ und $y=4$ gehen muss, dann können wir C berechnen. Wir brauchen diese Werte nur in die Gleichung der Geraden $y=4\mathrm{x}+C$ einzusetzen und erhalten

$$4 = 4 \cdot 1 + C = 4 + C .$$

Zieht man von beiden Seiten der Gleichung noch 4 ab, dann bleibt $C = 0$ übrig. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet dann einfach

$$y = 4\mathrm{x} .$$

Immerhin müssen wir uns merken: Die Bestimmung der Integrationskonstanten gelingt nicht immer! Es ist daher stets etwas Unbestimmtes um diese „Art“ von Integralen. Man nennt sie demnach auch „***unbestimmte Integrale***“. ...

Aus: „***Im Zaubergarten der Mathematik***“ von Alexander Niklitschek, 1938