Lineare Substitution (wichtig für Pflichtteil!)

Ist die innere Funktion bei zusammengesetzten Funktionen eine ***lineare Funktion***, so erhält man die Stammfunktion durch „***lineare Substitution***".

Dieses Verfahren besteht aus den folgenden Schritten:

1. Schreibe den Term als Produkt.
2. Konstante Faktoren bleiben erhalten (vgl. 5.).
3. Zerlege die zusammengesetzte Funktionen in die (lineare) innere Funktion und die äußere Funktion.
4. Bilde die Stammfunktion der äußeren Funktion und setzte die innere Funktion in diese Stammfunktion ein.
5. Schließlich wird der Ausdruck mit dem Kehrwert der inneren Ableitung multipliziert und der konstante Faktor (von 2.) davor gesetzt.

   Sind die Integrationsgrenzen nicht gegeben, wird im Allgemeinen noch eine Konstante *C* addiert. Diese Zahl wird beim Ableiten mit festen Grenzen nicht benötigt.
6. Kontrolliere das Ergebnis durch Ableiten.

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{5}{(4x-1)^3}$. Gesucht ist eine Stammfunktion.

Lösung der Beispielaufgabe:

zu 1.) $f(x)=5\cdot(4x-1)^{-3}$

zu 2.) Die Zahl 5 ist hier ein konstanter Faktor.

zu 3.) $(4x-1)^{-3}$ ist eine zusammengesetzte Funktion (der Form $u(v(x))$) mit der äußeren Fkt. $u(v)=v^{-3}$ und der linearen inneren Fkt. $v(x)=4x-1$.

zu 4.) Die Stammfunktion der äußeren Funktion lautet $U(v)=-\frac{1}{2}\cdot v^{-2}$.

Einsetzen der inneren Funktion liefert $-\frac{1}{2}\cdot(4x-1)^{-2}$.

zu 5.) Die innere Ableitung ergibt: $v'(x)=4$. Der Kehrwert davon ist $\frac{1}{4}$.

Zusammen mit dem konstanten Faktor und der Integrationskonstanten C kommen wir zum Ergebnis:

$$\boxed{F(x)=-5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot(4x-1)^{-2}+C=\frac{-5}{8\cdot(4x-1)^2}+C}$$

zu 6.) Kontrolliere das Ergebnis durch Ableiten. (Gilt: $F'(x)=f(x)$?).