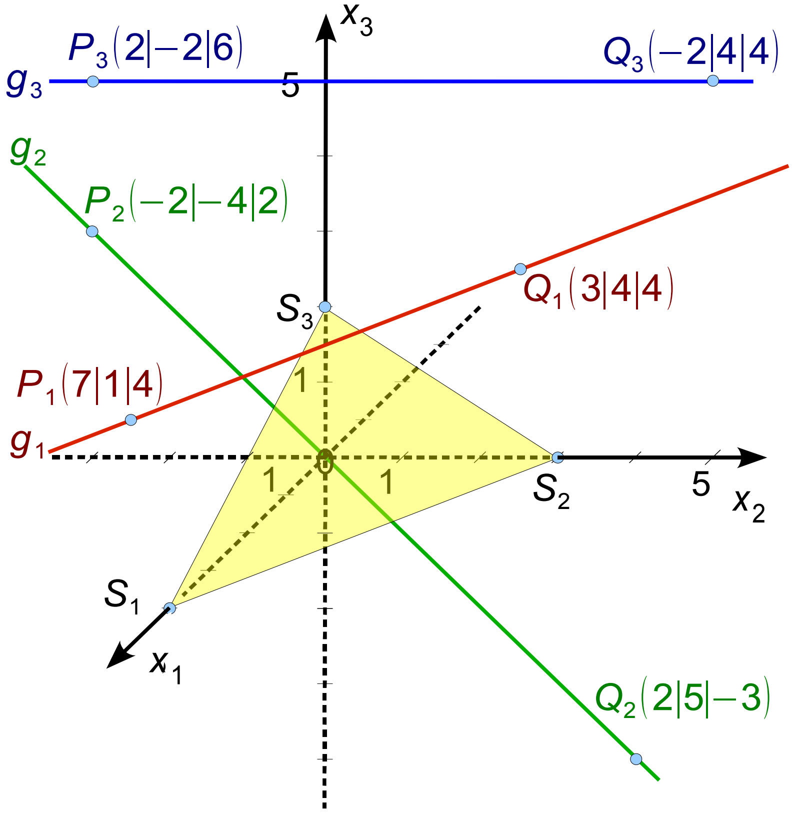
Musteraufgabe:

Parallelität und Abstand bei Ebene – Gerade



Aufgabe 1:

Überprüfe, welche der drei Geraden g_1, g_2 und g_3 parallel zur Ebene durch $S_1(4|0|0), S_2(0|3|0)$ und $S_3(0|0|2)$ verlaufen.

Löse diese Aufgabe auf drei verschiedene Arten.

Hinweise:

- Überlege, welche Information über die Geraden zur Lösung der Aufgaben ausreicht.
- Welche Information zur Ebene ist zum Parallelitätsnachweis notwendig.
- Die Aufgabe lässt sich mit Hilfe des Skalarprodukts lösen, oder aber mit der Definition der linearen Abhängigkeit (bzw. Unabhängigkeit). Eine dritte Lösungsmöglichkeit bietet die Formel zur Abstandsbestimmung Punkt – Ebene. Achte hierbei auf die Bedeutung der Betragsstriche.

Aufgabe 2:

Eine Gerade ist nicht parallel zur Ebene. Ändere bei dieser Geraden die *P*-Koordinate in x_2-Richtung derart, dass auch diese Gerade parallel zur Ebene verläuft.

Löse auch diese Aufgabe auf drei verschiedene Arten.

Hinweise:

- Ersetze die x_2-Koordinate von P_2 durch eine Variable.
- Bestimme den Wert der Variablen durch die obigen Parallelitätskriterien.
- Beachte in diesem Zusammenhang die Zusatzaufgabe am Ende der dritten Lösungsvariante.

Erste Lösung zu Aufgabe 1 (mit SKP):

Bei Parallelität zwischen einer Ebene und einer Geraden muss ein Normalenvektor der Ebene senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden stehen. Damit muss das Skalarprodukt dieser Vektoren null ergeben.

Normalenvektor der Ebene:

Die Koordinaten der Spurpunkte (ungleich null) liefern durch Kehrwertbildung die jeweiligen Koeffizienten der Ebenengleichung in der Achsenabschnitts-form. Aus $S_1=(4|0|0); S_2=(0|3|0)$ und $S_3=(0|0|2)$ folgt:

$$E:\ \frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{2}x_3=1\ .$$

Durch Multiplikation dieser Ebenengleichung mit dem Hauptnenner (12) vereinfachen sich die Koeffizienten, die bekanntlich die Komponenten eines Normalenvektors bilden.

$$E:\ 3x_1+4x_2+6x_3=12 \quad\Rightarrow\quad \vec{n}=(3|4|6)\ .$$

Richungsvektoren der Geraden:

Für $\vec{r}=\overrightarrow{PQ}$ als jeweiliger Richtungsvektor erhält man die Komponenten:

$$g_1:\ \vec{r}_1=\begin{pmatrix}3-7\\4-1\\4-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix};\quad g_2:\ \vec{r}_2=\begin{pmatrix}2+2\\5+4\\-3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\9\\-5\end{pmatrix};\quad g_3:\ \vec{r}_3=\begin{pmatrix}-2-2\\4+2\\4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\6\\-2\end{pmatrix}$$

Skalarprodukte:

$$\vec{r}_1\cdot\vec{n}=0;\quad \vec{r}_2\cdot\vec{n}=18\neq 0;\quad \vec{r}_3\cdot\vec{n}=0$$

Wie man sieht, ist nur die zweite Gerade nicht parallel zur gegebenen Ebene.

Zweite Lösung Aufgabe 1 (mit linearer Abhängigkeit):

Bei Parallelität müssen die Richtungsvektoren der Geraden und die Spannvektoren der Ebene linear abhängig sein.

Spannvektoren der Ebene:

Anhand der Zeichnung erkennt man:

$$\vec{u}=\overrightarrow{S_2S_1}=(4|-3|0);\quad \vec{v}=\overrightarrow{S_2S_3}=(0|-3|2)$$

Bei linearer Abhängigkeit muss sich der Richtungsvektor der Geraden durch eine Linearkombination der beiden Spannvektoren darstellen lassen.

Bei g_1 erkennt man sofort: $\vec{r}_1 = -1 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} \rightarrow g_1$ ist parallel zur Ebene.
Bei g_3 findet man $\vec{r}_3 = -1 \cdot \vec{u} + -1 \cdot \vec{v}$ → Auch g_3 verläuft parallel zur Ebene.
Bei g_2 liefert die Gleichung $\vec{r}_2 = s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$ keine Lösungen für *s* und *t*. Damit sind die drei Vektoren in diesem Fall lin. unabhängig. → Die Gerade g_2 kann nicht parallel zur Ebene verlaufen.

Dritte Lösung Aufgabe 1 (mit Abstandsformel):

Zur Abstandsbestimmung eines Punktes *Q* zu einer Ebene *E* benötigt man die Punktkoordinaten von *Q* sowie die Ebenengleichung in der Koordinatenform (alternativ auch in der Hesse-Form). → Siehe Formelsammlung.

Mit den Koordinaten von Q_1 und P_1 ergeben sich gleiche Abstände:

$$d(Q_1;E) = \left| \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 4 - 12}{\sqrt{9+16+36}} \right| = \frac{37}{\sqrt{61}} \approx 4{,}74 [\text{LE}]$$
$$d(P_1;E) = \left| \frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 4 - 12}{\sqrt{9+16+36}} \right| = \frac{37}{\sqrt{61}} \approx 4{,}74 [\text{LE}]$$

Da das Vorzeichen zwischen den Betragsstrichen in beiden Fällen gleich ist, liegen die Punkte P_1 und Q_1 auf der gleichen Seite von *E*. Damit ist gezeigt, dass die Gerade g_1 parallel zur Ebene ist.

Analog bestimmt man $d(Q_2;E) \neq d(P_2;E)$ und $d(Q_3;E) = d(P_3;E)$.

Erste Lösung Aufgabe 2 (mit SKP):

Mit $P_2 = (-2|a|2)$ erhält man folgenden Richtungsvektor von g_2:

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{P_2 Q_2} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 5-a \\ -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5-a \\ -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \vec{r}_2 \cdot \vec{n} &\overset{!}{=} 0 \\ 4 \cdot 3 + (5-a) \cdot 4 - 5 \cdot 6 &= 0 \\ 12 + 20 - 30 &= 4a \\ \frac{1}{2} &= a \end{aligned}$$

Zweite Lösung Aufgabe 2 (mit linearer Abhängigkeit):

Die Variable *a* ist so zu wählen, dass es reelle Zahlen *s* und *t* gibt, mit $\vec{r}_2 = s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$. Hieraus ergibt sich folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcll} \text{Gl. 1:} & 4 \cdot s + 0 \cdot t & = & 4 & \rightarrow s = 1 \\ \text{Gl. 2:} & -3 \cdot 1 - 3t & = & 5 - a & \rightarrow a = 5 + 3 - \frac{15}{2} = \frac{1}{2} \\ \text{Gl. 3:} & 0 \cdot s + 2 \cdot t & = & -5 & \rightarrow t = -\frac{5}{2} \end{array}$$

Dritte Lösung Aaufgabe 2 (mit Abstandsformel):

$$d(Q_2;E)=\left|\frac{3\cdot 2+4\cdot 5+6\cdot(-3)-12}{\sqrt{9+16+36}}\right|=\left|\frac{-4}{\sqrt{61}}\right|\approx 0{,}51\,[\text{LE}]$$

$$d(P_2;E)=\left|\frac{3\cdot(-2)+4\cdot a+6\cdot 2-12}{\sqrt{9+16+36}}\right| \quad\rightarrow\quad -6+4a+12-12=-4 \quad\Leftrightarrow\quad a=\frac{1}{2}$$

Beachte, dass bei Parallelität von g_2 und E die Vorzeichen innerhalb der Betragsstriche übereinstimmen müssen. So erhält man beispielsweise mit dem „positiven" Zähler $-6+4a+12-12=4 \quad\rightarrow\quad a=2{,}5$. In diesem Fall läge der Punkt P_2 aber auf der anderen Seite der Ebene (und die Gerade g_2 könnte unmöglich parallel zu E sein).

Zusatzaufgabe:

Bestimme für die zweite (falsche) Lösung aus der Abstandsformel den Durchstoßpunkt D von g_2 und E .

Lösung:

Geradengleichung von g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\2{,}5\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2+2\\5-2{,}5\\-3-2\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\2{,}5\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\2{,}5\\-5\end{pmatrix}$

Einsetzen in die Koordinatengleichung von *E:*

$$\begin{aligned}3\cdot(-2+4s)+4\cdot(2{,}5+2{,}5s)+6\cdot(2-5s)-12 &= 0\\ -6+10+12-12+12s+10s-30s &= 0\\ 4-8s &= 0 \rightarrow s=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Einsetzen von s in die Parametergleichung von g_2 liefert uns die Koordinaten von D: $\qquad D=\begin{pmatrix}0\\3{,}75\\-0{,}5\end{pmatrix}$

Fertige zur Übung in einem Koordinatensystem eine Zeichnung mit E und g_2 an!

Hinweise:

- Natürlich muss D aus Symmetriegründen genau in der Mitte zwischen P_2 und Q_2 liegen.

  → Elegante Alternativlösung mit Ortsvektoren: $\vec{D}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{P}_2+\vec{Q}_2)$
- Da der Richtungsvektor von g_2 aus den Koordinaten von P_2 und Q_2 gebildet wurde erkennt man diese Tatsache auch an dem Parameterwert für s.