

**Musteraufgabe 3** (von Parameterform zur Koordinatenform – Möglichkeit 1):

Wandle die folgende (Parameter-) Gleichung einer Ebene in die

Koordinatenform um:  $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

In der Koordinatenform tauchen die beiden Parameter später nicht mehr auf. Wir ersetzen sie durch Ausdrücke mit  $x_1, x_2$  und  $x_3$ .

Zunächst erhalten wir durch die obige Parameterdarstellung drei Gleichungen. Hiervon „verwerfen“ wir zunächst aber nur zwei:

$$1.) \quad x_1 = 1 + 3r + s$$

$$2.) \quad x_2 = 3 + r - 2s$$

$$3.) \quad x_3 = 2 + r$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich für  $r$ :  $r = x_3 - 2$

Setzt man dies in die erste Gleichung ein, folgt weiter:  $s = x_1 - 1 - 3 \cdot (x_3 - 2)$   
 $= x_1 - 3x_3 + 5$

Liegt ein Punkt  $X$  in der Ebene  $E$ , dann erfüllen seine Koordinaten die Koordinatengleichung von  $E$  aber ebenso gibt es zu  $X$  zwei Zahlen für  $r$  und  $s$ , so dass auch die Parametergleichung eine wahre Aussage ergibt.

Wir können damit unsere gefundenen Werte für  $r$  und  $s$  in die bisher nicht verwendete zweite Gleichung einsetzen. Abschließend müssen wir das Ergebnis nur noch nach  $x_1, x_2$  und  $x_3$  sortieren:

Aus 2.) folgt mit den gefundenen Werten für  $r$  und  $s$ :

$$x_2 = 3 + (x_3 - 2) - 2 \cdot (x_1 - 3x_3 + 5) \quad | +9 - x_2$$

$$9 = -2x_1 - x_2 + 7x_3$$

Formen wir unsere Koordinatengleichung noch in die Achsenabschnittsform um, erleichtern wir uns die Arbeit beim Zeichnen der Ebene (hier nicht gefordert).

$$E: -\frac{2}{9}x_1 - \frac{1}{9}x_2 + \frac{7}{9}x_3 = 1$$

Bei der Achsenabschnittsform sind die Kehrwerte der Koeffizienten gerade die jeweiligen Achsenabschnitte. Der Schnittpunkt der Ebene mit der  $x_1$ -Achse ist somit  $S_1 = (-4,5 | 0 | 0)$ , der Schnittpunkt der Ebene mit der  $x_2$ -Achse ist  $S_2 = (0 | -9 | 0)$  und entsprechend ist  $S_3 = (0 | 0 | \frac{9}{7}) \approx (0 | 0 | 1,3)$ .