Standardaufgabe der Analytischen Geometrie:

Abstand Punkt – Gerade mit Hilfe einer Abstandsfunktion

Beispiel:

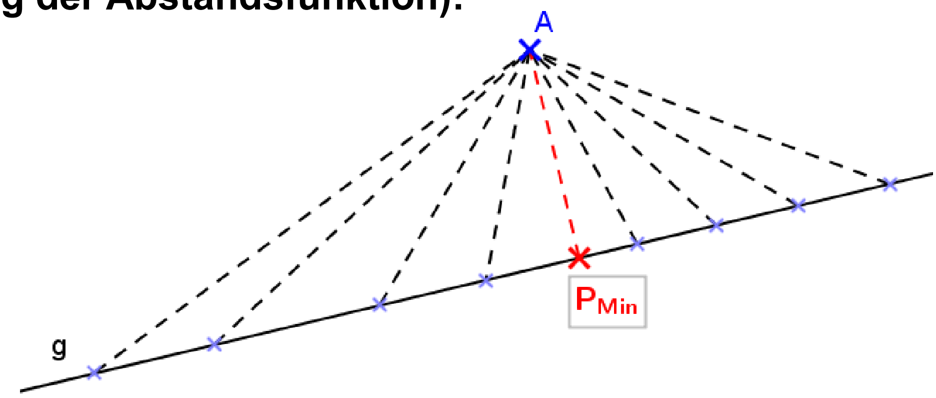
Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Punkt $A(2|0|4)$.

a) Bestimme den Punkt *P* auf *g* mit minimalem Abstand zu *A*.

b) Berechne den Abstand zwischen dem Punkt A und der Geraden *g*.

Lösung (Minimierung der Abstandsfunktion):

Zu a)



Wir können einen (beweglichen) Punkt der Geraden *g* mit variablen Koordinaten (abhängig vom Parameter *t*) beschreiben, wenn wir die Geradenkomponenten als Punktkoordinaten nebeneinander schreiben:

$P_t = (1-2t|2+2t|4+t)$ liegt für jedes *t* auf der Geraden *g.*

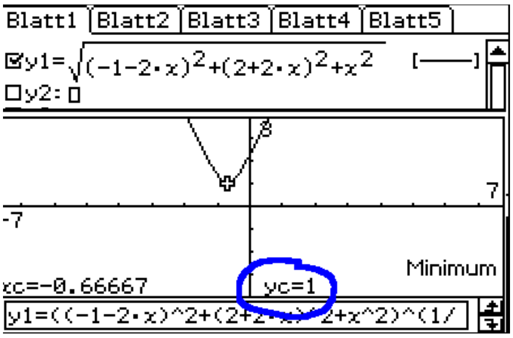
Der Verbindungsvektor vom Punkt *A* zu diesem variablen Punkt P_t hat je nach Wahl von *t* eine ganz bestimmte Länge:

$$\overrightarrow{AP_t} = \begin{pmatrix} 1-2t-2 \\ 2+2t \\ 4+t-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2t \\ 2+2t \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \left|\overrightarrow{AP_t}\right| = \sqrt{(-1-2t)^2 + (2+2t)^2 + t^2} =: d(t)$$

Mit dem GTR (oder CAS) können wir diese Abstandsfunktion $d(t)$ minimieren (z. B. indem wir das Schaubild betrachten und den y-Wert des tiefsten Punktes bestimmen → siehe „*Minimierung des Schaubildes*“).

Ohne Taschenrechner muss man einen Trick verwenden: die Abstandsfunktion ist stets positiv oder null. Wenn wir sie quadrieren, erhalten wir eine quadratische Funktion. Diese hat ihr Minimum an der gleichen Stelle (→ siehe „*Ohne Taschenrechner durch Differenzieren*“ bzw. „*Scheitelbestimmung*“).

Mit GTR/CAS: Minimierung des Schaubildes:



Tippe die Abstandsfunktion in den y-Speicher des Rechners und bestimme das Minimum über das zugehörige Schaubild. Den x-Wert des Minimalpunktes müssen wir für Teil a) bei P_t einsetzen.

$$\boldsymbol{P_{-0,66667} \approx (2,33|0,67|3,33)}$$

Der y-Wert ist unser gesuchter Abstand im Teil b).

Ohne Taschenrechner durch Differenzieren:

Durch Quadrieren der Abstandsfunktion erhalten wir eine Hilfsfunktion deren Minimalstelle wir mit den Mitteln der Differenzialrechnung bestimmen können:

$$h(t)=(d(t))^2=(-1-2t)^2+(2+2t)^2+t^2=9t^2+12t+5$$

$$h'(t)=18t+12 \;\rightarrow\; h'(t)=0 \text{ für } t=-\frac{12}{18}=-\frac{2}{3}$$

$$h''(t)=18 \;\rightarrow\; h'\left(-\frac{2}{3}\right)=18>0 \;\rightarrow\; -\frac{2}{3} \text{ ist Minimalstelle.}$$

Diesen Wert müssen wir für Teilaufgabe a) wieder bei $P_t=(1-2t|2+2t|4+t)$ und für Teilaufgabe b) in die Abstandsfunktion $d(t)$ einsetzen:

Lösung Teil a): $P_{-2/3}=\left(\frac{3}{3}+\frac{4}{3}\middle|\frac{6}{3}-\frac{4}{3}\middle|\frac{12}{3}-\frac{2}{3}\right)=\boldsymbol{\left(\frac{7}{3}\middle|\frac{2}{3}\middle|\frac{10}{3}\right)}$

Teil b): $d\left(-\frac{2}{3}\right)=\sqrt{\left(-\frac{3}{3}+\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{6}{3}-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1+4+4}{9}}=\mathbf{1}$

Ohne Taschenrechner durch Scheitelbestimmung:

Wieder bilden wir durch Quadrieren der Abstandsfunktion unsere ***quadratische*** Hilfsfunktion $h(t)$. Stauchen wir die zugehörige Parabel mit dem Faktor 9, erhalten wir eine verschobene Normalparabel. Beim Stauchen ändert sich die Minimalstelle nicht. Wir berechnen sie als Rechtswert des Scheitels:

$$h(t) \;=\; (d(t))^2 \;=\; 9t^2+12t+5$$

$$h_1(t) \;=\; \frac{1}{9}\cdot h(t) \;=\; t^2+\frac{12}{9}t+\frac{5}{9} \;=\; t^2+\frac{4}{3}t+\frac{5}{9}$$

Das neue Schaubild verschieben wir nun um $\frac{5}{9}$ nach unten. Hierdurch verändert sich der Rechtswert des Scheitels nicht. Bei der zugehörigen Funktion lassen sich dann durch Ausklammern von t zwei Nullstellen bestimmen. Genau dazwischen liegt der Rechtswert unseres Scheitels.

$$h_2(t) \;=\; t^2+\frac{4}{3}t \;=\; t\cdot\left(t+\frac{4}{3}\right) \;\rightarrow\; t_1=0 \text{ und } t_2=-\frac{4}{3} \;\rightarrow\; t_{Min}=-\frac{2}{3}$$

Den gesuchten Punkt und den Abstand erhalten wie oben durch Einsetzen in P_t und $d(t)$.