

Standardaufgabe der Analytischen Geometrie:

Abstand eines Punktes zu einer Geraden

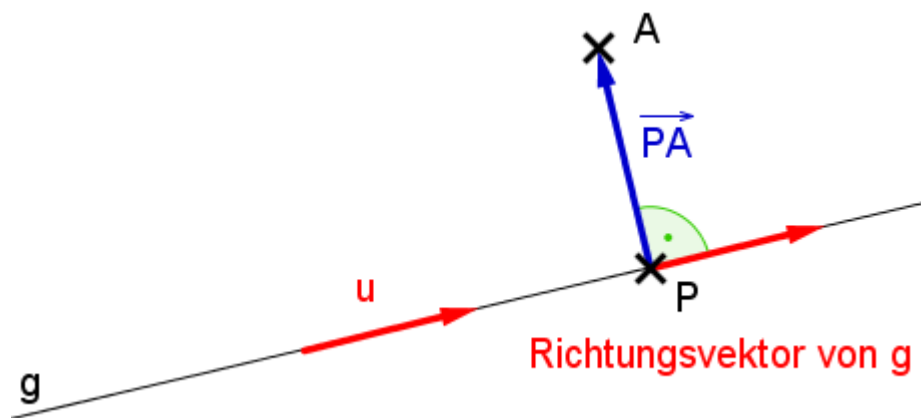
Beispiel:

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Punkt $A(2|0|4)$.

- a) Bestimme den Punkt P auf g mit minimalem Abstand zu A .
- b) Berechne den Abstand zwischen dem Punkt A und der Geraden g .

Lösung

Zu a)



Wir wissen, dass der Verbindungsvektor zwischen P und A orthogonal zum Richtungsvektor von g stehen muss. Wir fordern daher, dass das Skalarprodukt zwischen diesen beiden Vektoren null ist (s. u.).

Hieraus ergibt sich eine Gleichung.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-p_1 \\ 0-p_2 \\ 4-p_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow -2 \cdot (2-p_1) - 2p_2 + 4 - p_3 \stackrel{!}{=} 0$$

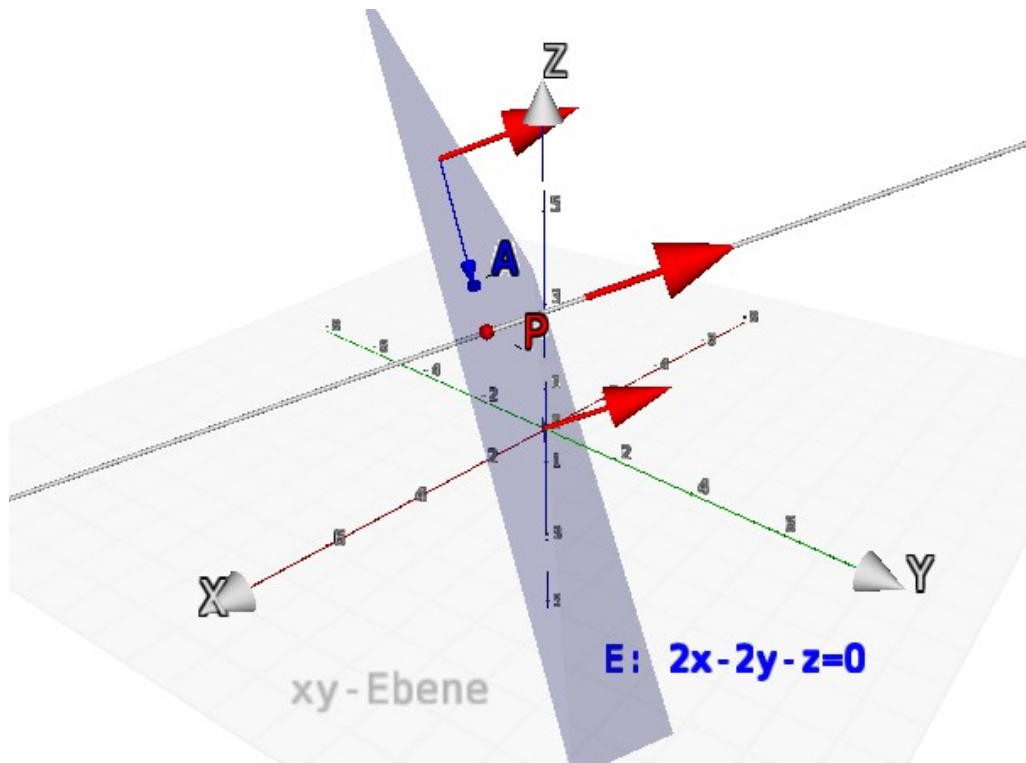
$$2p_1 - 2p_2 - p_3 \stackrel{!}{=} 0$$

Problem: Für die drei Koordinaten des gesuchten Punktes P benötigen wir (mind.) drei Gleichungen!

Unsere obige Gleichung entspricht einer (Hilfs-) Ebene. Das muss auch so sein, denn der Richtungsvektor von g lässt sich beliebig verschieben. Somit besitzen alle Punkte dieser Ebene die geforderten Eigenschaft, nämlich dass der Verbindungsvektor zu A orthogonal zum Richtungsvektor von g steht.

Mit dem Schnittpunkt aus Ebene und Gerade erhalten wir im nächsten Schritt die Koordinaten unseres Punktes P .

Berechnung des Schnittpunkts aus Hilfsebene E und der Geraden g



Wir müssen die Komponenten von g in die Ebenengleichung einsetzen. Auf diese Weise reduzieren wir unsere drei Unbekannten auf eine einzige (den Parameter t der Geradengleichung).

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1-2t) - 2 \cdot (2+2t) - (4+t) &= 0 \\ 2 - 4t - 4 - 4t - 4 - t &= 0 \\ -6 &= 9t \\ -\frac{2}{3} &= t \end{aligned}$$

Mit dem Wert für den Parameter t erhält man schließlich aus der Geradengleichung den Ortsvektor zum gesuchten Punkt P .

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4}{3} \\ 2 - \frac{4}{3} \\ 4 - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Damit lauten die Koordinaten von P : $\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

$$\text{Zu b) } \vec{PA} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \rightarrow |\vec{PA}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{1}{3}$$

Damit beträgt der Abstand von A zur Gerade g $\frac{1}{3}$ Längeneinheiten.