

Standardaufgabe der Analytischen Geometrie:

Abstandsberechnung Punkt – Gerade (mit Hilfsebene)

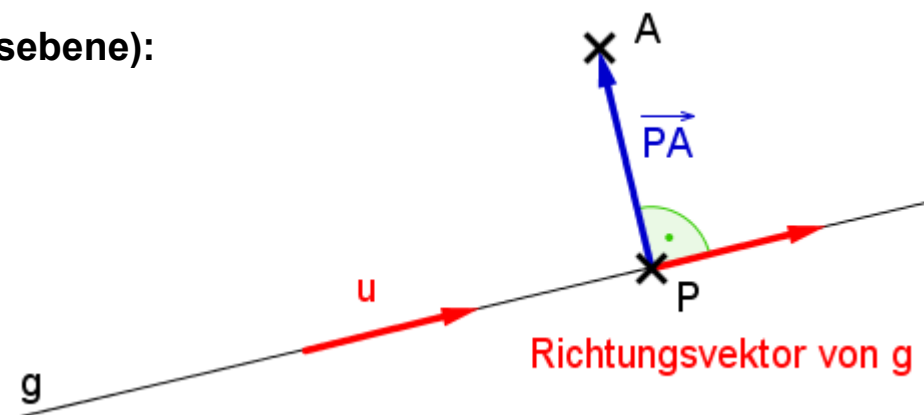
Beispiel:

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Punkt $A(2|0|4)$.

- Bestimme den Punkt P auf g mit minimalem Abstand zu A .
- Berechne den Abstand zwischen dem Punkt A und der Geraden g .

Lösung (mit Hilfsebene):

Zu a)



Wir wissen, dass der Verbindungsvektor zwischen P und A orthogonal zum Richtungsvektor von g stehen muss. Wir fordern daher, dass das Skalarprodukt zwischen diesen beiden Vektoren null ist (s. u.).

Hieraus ergibt sich eine Gleichung.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-p_1 \\ 0-p_2 \\ 4-p_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad -2 \cdot (2-p_1) - 2p_2 + 4 - p_3 \stackrel{!}{=} 0$$

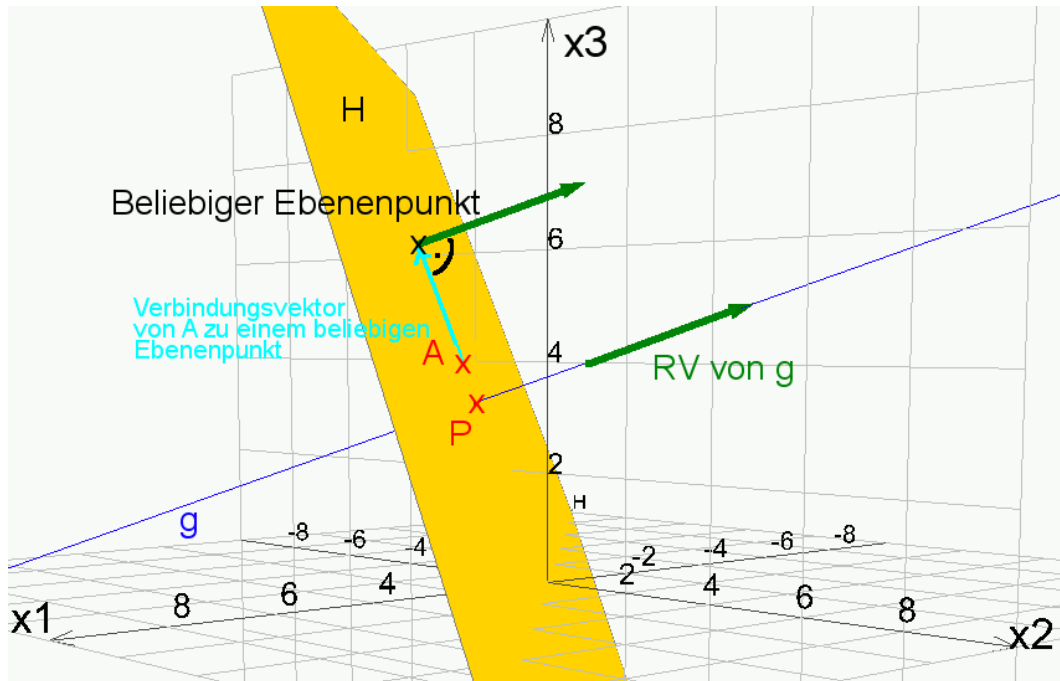
$$2p_1 - 2p_2 - p_3 \stackrel{!}{=} 0$$

Problem: Für die drei Koordinaten des gesuchten Punktes P benötigen wir (mind.) drei Gleichungen!

Unsere obige Gleichung entspricht einer (Hilfs-) Ebene mit dem Punkt A . Das muss auch so sein, denn der Richtungsvektor von g lässt sich beliebig verschieben. Somit erfüllen alle Punkte dieser Ebene die geforderten Eigenschaft, nämlich dass der Verbindungsvektor zu A orthogonal zum Richtungsvektor von g steht (siehe nachfolgende Abbildung).

Mit dem Schnittpunkt aus Ebene und Gerade erhalten wir im nächsten Schritt die Koordinaten unseres Punktes P .

Schnittpunkt aus Hilfsebene E und der Geraden g:



Wir müssen die Komponenten von g in die Ebenengleichung einsetzen. Auf diese Weise reduzieren wir unsere drei Unbekannten auf eine einzige (den Parameter t der Geradengleichung).

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1 - 2t) - 2 \cdot (2 + 2t) - (4 + t) &= 0 \\ 2 - 4t - 4 - 4t - 4 - t &= 0 \\ -6 &= 9t \\ -\frac{2}{3} &= t \end{aligned}$$

Mit dem Wert für den Parameter t erhält man schließlich aus der Geradengleichung den Ortsvektor zum gesuchten Punkt P .

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} + \frac{4}{3} \\ \frac{6}{3} - \frac{4}{3} \\ \frac{12}{3} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Damit lauten die Koordinaten von P : $\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

Zu b)
$$\vec{PA} = \begin{pmatrix} \frac{6}{3} - \frac{7}{3} \\ 0 - \frac{2}{3} \\ \frac{12}{3} - \frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{PA}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$

Der Abstand von A zur Gerade g beträgt 1 Längeneinheit.