Die hessesche Abstandsformel

Wir zeigen im Folgenden die Gültigkeit der folgenden Formel.

Es gilt für den Abstand *d* eines Punktes $R=(r_1|r_2|r_3)$ und zu einer Ebene $E: a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$ der Zusammenhang:

$$d=\left|\frac{a_1 r_1+a_2 r_2+a_3 r_3-b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right|$$

Beweis:

Schritt 1:

Mit einem Ortsvektor $\vec{p}$ zu einem Ebenenpunkt *P* und einem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0$ der Ebene *E* folgt:

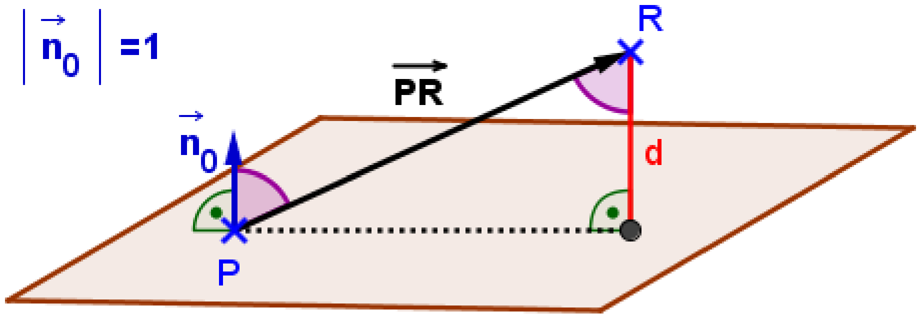
$$E: (\vec{x}-\vec{p})\cdot(\vec{n}_0)=0 \quad \text{(Hessesche Normalenform (HNF))} \qquad (1)$$

Hier setzten wir für den (variablen) Ortsvektor $\vec{x}$ den Ortsvektor $\vec{r}$ von *R* ein. Da *R* in der Regel nicht in der Ebene *E* liegt, kann die Gleichung natürlich in diesen Fällen nicht erfüllt werden. Wir betrachten daher nur die linke Seite der Gleichung und interpretieren dieses Skalarprodukt:

$$(\vec{r}-\vec{p})\cdot(\vec{n}_0)=\overrightarrow{PR}\cdot\vec{n}_0=|\overrightarrow{PR}|\cdot|\vec{n}_0|\cdot\cos\alpha$$

Da die Länge von $\vec{n}_0$ gleich eins ist, können wir die rechte Seite als Ankathete eines rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $|\overrightarrow{PR}|$ interpretieren.

An der nachfolgenden Skizze erkennen wir, dass der Winkel bei *P* tatsächlich bei *R* wieder auftaucht (Wechselwinkel an Parallelen).



Wegen $\cos\alpha=\frac{AK}{Hyp}\rightarrow d=|\overrightarrow{PR}|\cdot\cos\alpha$ folgt:

$$\boxed{d=(\vec{r}-\vec{p})\cdot(\vec{n}_0)}\;^{*)} \qquad (2)$$

Schritt 2:

Wird die Ebene E in der Koordinatenform

$$E: a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \qquad (3)$$

ausgedrückt, dann liefern die Koeffizienten der Gleichung die Koordinaten eines Normalenvektors.

---

*) Die Gleichung gilt nur, wenn R auf der Seite der Ebene liegt, auf die $\vec{n}_0$ zeigt (siehe „Lücke“ bei Schritt 4).

Durch „Streckung“ mit dem Kehrwert seiner Länge wird hieraus ein Normaleneinheitsvektor.

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{n}_0=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}}$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung (3) mit $\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$, entsprechen die Koeffizienten in der Koordinatengleichung den Komponenten des Normaleneinheitsvektors.

$$E: \frac{a_1 x_1+a_2 x_2+a_3 x_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}=\frac{b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \qquad (4)$$

Nun lässt sich (4) so umformen, dass die rechte Seite der HNF entspricht:

$$E: \frac{a_1 x_1+a_2 x_2+a_3 x_3-b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}=0 \qquad (5)$$

Schritt 3:

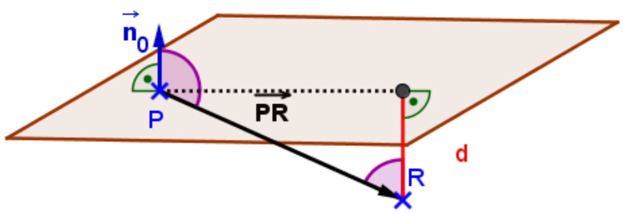
Wir erinnern uns, dass wir durch Einsetzung der Komponenten von $\vec{r}$ in die linke Seite der HNF der Abstand von *R* zur Ebene *E* bestimmt haben. Das Gleiche können wir nun auf der linken Seite unserer umgeformten Ebenengleichung (5) tun. Das Ergebnis muss hierbei wieder der Abstand von *R* zu *E* sein:

$$d=\frac{a_1 \boldsymbol{r}_1+a_2 \boldsymbol{r}_2+a_3 \boldsymbol{r}_3-b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \qquad (6)$$

Schritt 4:

In unseren Überlegungen zu Schritt 1 befindet sich eine Lücke. Es kann durchaus sein, dass $\vec{n}_0$ nicht in die Richtung der Ebene E zeigt, auf der R liegt.

In diesem Fall ist der Winkel im rechtwinkligen Dreieck so groß wie der Nebenwinkel β des eingeschlossenen Winkels der Vektoren.



Es gilt: $\alpha+\beta=180°$ bzw: $\alpha=180°-\beta$

Nun gilt weiter: $\cos\alpha=-\cos(180°-\alpha)$, was für das Skalarprodukt (2) bedeutet:

$$\boxed{-d=(\vec{r}-\vec{p})\cdot(\vec{n}_0)}$$

Vereinbarung:

Abstände sind immer positiv, egal in welche Richtung $\vec{n}_0$ zeigt. Aus diesem Grunde benötigen wir bei der Formel zu Beginn die Betragsstriche.