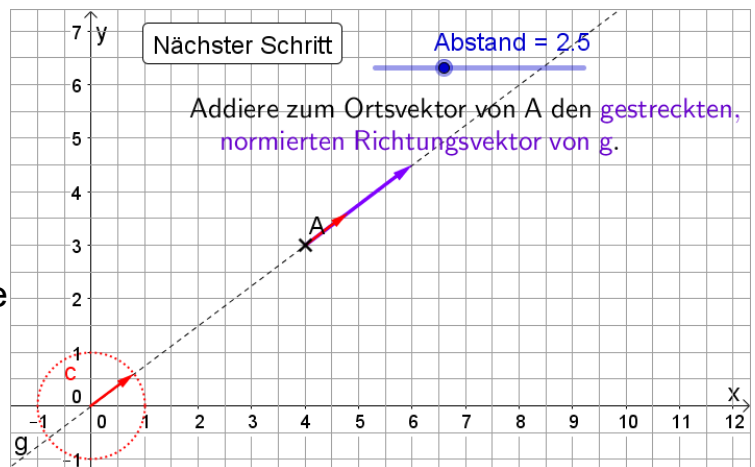


## Übungsaufgabe zum Abstand von Vektoren

Bestimme rechnerisch zum Punkt  $A=(4|3)$  die Koordinaten der Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , die zu  $A$  den Abstand 2,5 LE (Längeneinheiten) besitzen und mit  $A$  auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden liegen.

### Tipps zu Lösung:

- Durch die Punktkoordinaten von  $A$  ist ein Richtungsvektor der Ursprungsgeraden festgelegt.
- Du kannst jeden Vektor außer dem Nullvektor (auf die Länge 1) normieren indem Du ihn mit dem Kehrwert seiner Länge multiplizierst.
- Wenn Du einen Vektor mit der Länge eins mit einer Zahl multiplizierst (streckst) besitzt er anschließend genau die Länge des Betrages dieser Zahl.



### Lösungsvariante 1 – mit Vektornormierung:

Wähle als Richtungsvektor der Ursprungsgeraden den Ortsvektor von  $A$ .

Strecke diesen Richtungsvektor auf die Länge eins:

$$\frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

Multipliziere diesen Vektor mit  $2,5 = \frac{5}{2}$  bzw. mit  $-2,5 = -\frac{5}{2}$ . In beiden Fällen besitzt der gestreckte Vektor die Länge 2,5:

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} \text{ bzw. } -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

Diese beiden Vektoren musst Du im vorletzten Schritt zum Ortsvektor von  $A$  addieren. Die beiden Ergebnisvektoren zeigen (vom Koordinatenursprung) zu den gesuchten Punkten  $P_1$  und  $P_2$ :

$$\begin{aligned} \vec{OP}_1 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4,5 \end{pmatrix} \\ \vec{OP}_2 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus diesen zwei Ortsvektoren erhältst Du sofort die Koordinaten der Punkte auf der Ursprungsgeraden durch  $A$  mit 2,5 Längeneinheiten Abstand zu  $A$ :

$$P_1=(6|4,5) \text{ und } P_2=(2|1,5)$$

## Lösungsvariante 2 – mit Wurzelgleichung:

Für alle Punkte auf der Ursprungsgeraden liefern die Punktkoordinaten die Komponenten des entsprechenden Ortsvektors.

Die Differenz zweier Ortsvektoren liefert nach der Regel („vorne minus hinten“ oder „Spitze minus Schaft“) den Verbindungsvektor vom „hinteren zum vorderen“ Punkt.

Gesucht sind je ein „vorderer Punkt“ ( $P_1$  bzw.  $P_2$ ) zu zwei 2,5 LE langen Verbindungsvektoren mit A als „hinterem Punkt“ (Schaft).

**Ansatz:** Gesucht ist  $P=(p_1 | p_2)$  mit  $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(4-p_1)^2+(3-p_2)^2}=2,5$  (Gl. 1.)

Diese Wurzelgleichung besitzt zwei unbekannte Variablen. Zur eindeutigen Lösung benötigen wir eine zweite Gleichung. Diese erhalten wir aus der Tatsache, dass eine Streckung (bzw. Stauchung) des Ortsvektors von A zu  $P_1$  bzw.  $P_2$  führt.

Es gilt:  $\overrightarrow{OP}=t \cdot \overrightarrow{OA}=t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  d. h.  $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \cdot 4 \\ t \cdot 3 \end{pmatrix}$  (Gl. 2.)

Eingesetzt in die obige Wurzelgleichung für  $|\overrightarrow{AP}|$  liefert dies:

$$\begin{aligned}\sqrt{(4-t \cdot 4)^2+(3-t \cdot 3)^2} &= 2,5 && | \text{hoch 2} \\ (4-t \cdot 4)^2+(3-t \cdot 3)^2 &= 6,25 \\ 16-32t+16t^2 + 9-18t+9t^2 &= 6,25 \\ 25t^2-50t+25 &= 6,25 && | : 25 \\ t^2-2t+1 &= 0,25 && | -0,25 \\ t^2-2t+0,75 &= 0 \\ \rightarrow t_{1/2} &= +1 \pm \sqrt{1-0,75} = 1 \pm \sqrt{0,25} = 1 \pm 0,5\end{aligned}$$

Diese beiden Werte für t liefern mit (Gl. 2) die Punktkoordinaten unserer gesuchten Punkte  $P_1$  und  $P_2$ :

$$P_1=(6 | 4,5) \text{ und } P_2=(2 | 1,5)$$

### Hinweis:

Du findest auf dem Landesbildungsserver Baden-Württemberg unter

[www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/sek2/linalg/vec/abstand01.html](http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/sek2/linalg/vec/abstand01.html)

eine passende Animation, mit der du viele Aufgabenstellungen zu Problemen der Art „**Abstand Punkt-Punkt auf einer Geraden**“ lösen kannst.

