Die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation im Unterricht

Rainer Müller und Hartmut Wiesner

Einleitung

Die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \tag{1}$$

wird allgemein als ein wesentlicher Bestandteil der Quantenmechanik angesehen. Entsprechend fehlt sie in keinem didaktischen Konzept zur Vermittlung der Quantenphysik. Im ersten Teil dieses Beitrags [1], wurde auf die Interpretation der Beziehung (1) eingegangen. Die verschiedenen Ansätze wurden vorgestellt, und es wurde gezeigt, wie groß das Spektrum der Meinungen gerade in diesem Bereich ist.

Ebenso wichtig für die Vermittlung der Unbestimmtheitsrelation in der Schulpraxis ist es jedoch, geeignete Wege zu ihrer Herleitung und Veranschaulichung aufzuzeigen. Eine theoretisch saubere Ableitung der Ungleichung (1) aus den Kommutatorrelationen zwischen Ort und Impuls ist für die Behandlung in der Schule zu aufwendig und würde für das Verständnis der zugrundeliegenden Physik auch wenig bringen. Man ist also auf Beispiele und heuristische Überlegungen angewiesen. Hier zeigt sich allerdings, daß vielen dieser Illustrationen implizit klassische Vorstellungen (wie etwa feste Bahnen) zugrundeliegen. Es besteht die Gefahr, daß dadurch das Denken in klassischen Kategorien noch gestärkt wird, was natürlich der didaktischen Absicht diametral zuwiderliefe.

Im folgenden sollen die verbreitetsten Ansätze zur Herleitung der Unbestimmtheitsrelation in der Schule vorgestellt und kritisch analysiert werden. Dabei soll versucht werden, Möglichkeiten zum Unterricht aufzuzeigen, die ohne Rekurs auf klassische Begriffe auskommen. Insbesondere die Demonstration der Unbestimmtheitsrelation am Einzelspalt wird in dieser Hinsicht ausführlich erörtert.

Ansätze zur Vermittlung der Unbestimmtheitsrelation

1. Heisenberg-Mikroskop

Dieses Gedankenexperiment, das Heisenberg selbst zur Illustration seiner Beziehung benutzte, wurde schon in einem vorangegangenen Artikel [1] vorgestellt. Es wird dabei versucht, den Ort eines Elektrons (oder eines anderen Quantenobjekts) durch Beleuchtung mit kurzwelliger Strahlung der Wellenlänge λ festzulegen (Abb. 1). Das beleuchtete Objekt streut das Licht, so daß man es mit einem Mikroskop betrachten kann und so Aufschluß über seinen Ort erhält. Nun ist aus der Theorie des Mikroskops bekannt, daß sein Auflösungsvermögen durch die Wellenlänge des verwendeten Lichts und den Öffnungswinkel θ begrenzt ist. Strukturen, die kleiner sind als

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{\sin\theta}$$

können nicht aufgelöst werden, da sie als endliche Beugungsscheibchen erscheinen. Die Lokalisierung des betrachteten Objekts gelingt also nur etwa innerhalb einer Wellenlänge, und um so besser, je kurzwelliger das zur Beleuchtung benutzte Licht ist.

Auf der anderen Seite ist die Streuung des Lichts ein quantenhafter Vorgang. Schon ein einzelnes Photon übt bei der Streuung einen Rückstoß auf das beleuchtete Objekt aus, wie vom Compton-Effekt bekannt ist. Der Betrag des bei der Streuung übertragenen Impulses ist nach Heisenbergs Argumentation von der Größenordnung des Photonenimpulses, also $p \approx h/\lambda$. Die Richtung des gestreuten Photons (und damit des übertragenen Impulses) ist jedoch innerhalb des Öffnungswinkels 2θ unbekannt, da jedes Photon, das überhaupt in das Objektiv gestreut wird, zum Bild gleichermaßen beiträgt. Der Rückstoß ist daher nur bis auf

$$\Delta p \approx \frac{h}{\lambda} \sin\theta$$

zu ermitteln, und für das Produkt der beiden Unsicherheiten ergibt sich

$$\Delta x \, \Delta p \approx h.$$

Der Kern der Argumentation ist also: Falls man versucht, den Ort eines Elektrons durch Beleuchtung mit hinreichend kurzwelligem Licht zu ermitteln, wird durch den unkontrollierbaren Rückstoß des gestreuten Photons der Impuls des Elektrons derart gestört, daß die Unbestimmtheitsrelation erfüllt ist.

Was kann man zur praktischen Eignung dieser Illustration für Unterrichtszwecke aussagen? Will man die Unbestimmtheitsrelation im Unterricht mit Hilfe dieser Störungsanschauung einführen, wird sich bei den Schülerinnen und Schüler fast zwangsläufig die Vorstellung ergeben, daß das Elektron vor der Störung einen bestimmten Impuls gehabt hat (was sollte sonst gestört werden?). Da das Elektron vor der Messung auch einen bestimmten Ort gehabt haben soll, wird man zu klassischen Auffassungen über die Natur der Quantenobjekte geführt. Heisenberg selbst gab ja eine ähnliche Interpretation des Gedankenexperiments und kam so zu seiner subjektivistischen Deutung der Unbestimmtheitsrelation. Will man eine solche Position aus dem heutigen Physikunterricht ausschließen, muß man sorgfältig vermeiden, derartige klassische Vorstellungen zu fördern. Das Heisenbergsche Gedankenexperiment kann daher zur Illustration der Unbestimmtheitsrelation nur beschränkt empfohlen werden.

2. Unschärfe von Wellenpaketen

Schon in der klassischen Optik ist bekannt, daß man durch Überlagerung von ebenen Wellen $\exp(ikx)$ mit leicht verschiedenen Wellenzahlen lokalisierte Wellenpakete erhalten kann. Für ein solchermaßen konstruiertes Wellenpaket kann man mit Hilfe der Theorie der Fourier-Transformationen als strenges Resultat folgendes zeigen [2]: Es ist nicht möglich, durch Superposition von Wellen aus einem beschränkten Wellenzahlbereich Δk Wellenpakete zu konstruieren, deren Ortsausdehnung kleiner als $1/\Delta k$ ist. Es gilt also eine Unschärferelation der Form $\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$.

Man kann sich dieses Ergebnis auch heuristisch plausibel machen Wir betrachten eine Wellengruppe, die aus einer Überlagerung von ebenen Wellen im Bereich zwischen k und $k + \Delta k$ besteht. Damit die Welle auf einen bestimmten Bereich Δx (z. B. um $x_0 = 0$) beschränkt bleibt, müssen die verschiedenen Teilwellen innerhalb dieses Bereiches konstruktiv interferieren, sich außerhalb davon jedoch gegenseitig auslöschen. Eine einfache Abschätzung für das Auftreten destruktiver Interferenz liefert die folgende Überlegung: Wir teilen das Spektrum in zwei Teile, die zwischen k und $k + \Delta k/2$ sowie zwischen $k + \Delta k/2$ und $k + \Delta k$ liegen (Abb. 2). Dann sagt die Bedingung

$$e^{ikx_{min}} + e^{i(k+\Delta k/2)x_{min}} = 0$$

aus, daß die am jeweils linken Ende der beiden Teile (bei k und $k + \Delta k/2$) gelegenen Teilwellen sich an der Stelle x_{min} gegenseitig zu Null aufheben. Kürzt man den gemeinsamen Faktor, erhält man $\exp(i/2\Delta k x_{min}) = -1$. Der entscheidende Punkt ist nun, daß man exakt die gleiche Bedingung auch für die destruktive Interferenz zwischen den Teilwellen am jeweils rechten Ende des Spektrums findet, und auch für alle Teilwellen-Paare (im Abstand $\Delta k/2$ voneinander) dazwischen. Das heißt, daß an der Stelle x_{min} vollständige Auslöschung herrscht. Für den Ort des ersten Minimums erhält man so $\Delta k\, x_{min} = 2\pi$, und wenn man für Δx den Abstand zwischen Hauptmaximum und erstem Nebenmaximum ansetzt, ergibt sich als Abschätzung für die Breite des Wellenpakets

$$\Delta k\, \Delta x = 2\pi. \tag{2}$$

bei

Die vollständige mathematische Analyse, in der die Größen Δx und Δp korrekt als Momente einer Verteilung definiert werden, liefert den richtigen Zahlenfaktor $\frac{1}{2}$ auf der rechten Seite [2].

Diese Argumentation aus der klassischen Physik läßt sich unmittelbar auf die Quantenmechanik übertragen, wenn man die de-Broglie-Beziehung $p = \hbar k$ benutzt. Die ebenen Wellen aus der klassischen Optik werden dabei zu Impulseigenfunktionen uminterpretiert. Die Unbestimmtheitsrelation $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ ist dann eine Aussage über die Eigenschaften von quantenmechanischen Zuständen (also von Wellenfunktionen). Eine solche Demonstration der Unbestimmtheitsrelation ist fachlich korrekt und benutzt keine impliziten Vorstellungen über klassische Bahnen. Eine Vorgehensweise dieser Art erscheint daher sinnvoll für den Unterricht in der Schule.

Eine Komplikation ergibt sich, wenn man die Einführung von komplexen Zahlen vermeiden will. Da dann die komplexe Exponentialfunktion nicht zur Verfügung steht, liegt es zunächst nahe ein Wellenpaket aus ebenen Wellen der Form $\sin(kx)$ zusammenzusetzen. Die Unschärfebeziehung der klassischen Optik bleibt mit dieser Wahl zwar richtig. Es ist aber beim Übergang zur Quantenmechanik nicht mehr korrekt, diese Funktionen als ebene Wellen mit einem bestimmten Impuls zu bezeichnen. (Sie sind keine Eigenfunktionen des Impulsoperators, sondern aus diesen durch Superposition zusammengesetzt.) Die Argumentation verliert dann ihren quantenphysikalischen Hintergrund und kann nicht mehr im gewünschten Sinn interpretiert werden.

Eine weitere Möglichkeit, die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation an Wellenpaketen aufzuzeigen ist die direkte Berechnung von Orts- und Impulsbreite an einem Gaußschen Wellenpaket. Bekanntlich sind dies Zustände minimaler Unschärfe, so daß man die Unbestimmtheitsrelation mit einem Gleichheitszeichen erhält. Um diesen Weg zu gehen, müssen aber Gaußsche Integrale verschiedener Art gelöst werden, was die mathematischen Anforderungen wohl auch in einem Leistungskurs übersteigt.

3. Potentialtopf

Die Möglichkeit, die Unbestimmtheitsrelation am eindimensionalen, unendlich hohen Potentialtopf (Abb. 3) nachzurechnen, wurde von Wegener [3] vorgeschlagen. Ein Vorteil dieser Zugangsweise ist, daß man mit den echten quantenmechanischen Standardabweichungen $(\Delta x)^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2$ und $(\Delta p)^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2$ arbeiten kann, statt auf mehr oder weniger willkürliche Festlegungen zurückgreifen zu müssen.

Die Grundzustandswellenfunktion innerhalb des Potentialtopfes (also im Bereich zwischen $x = 0$ und $x = L$) ist

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right).$$

Zur Berechnung der Ortsstreuung $(\Delta x)^2$ muß man die beiden quantenmechanischen Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle$ und $\langle \hat{x}^2 \rangle$ berechnen. Aus der allgemeinen Formel für den Erwartungswert eines Operators A:

$$\langle \hat{A} \rangle = \int dx\, \psi^*(x) \hat{A} \psi(x)$$

erhält man leicht den mittleren Ort zu $\langle \hat{x} \rangle = \frac{1}{2} L$ (also die Mitte des Potentialtopfes). Für

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L dx\, x^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{L} x \right)$$

ergibt sich andererseits

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{L^2}{6\pi^2} \left(2\pi^2 - 3 \right),$$

so daß die Ortsstreuung

$$(\Delta x)^2 \equiv \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = L^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \right) \approx 0,033\, L^2$$

ist. Die Standardabweichung vom Mittelwert beträgt also $\Delta x \approx 0,18\, L$

Zur Demonstration der Unbestimmtheitsrelation muß man entsprechend auch die Varianz des Impulses bestimmen. Hat man den Impulsoperator eingeführt, ist dies relativ einfach. Der Mittelwert ist

$$\begin{aligned} \langle \hat{p} \rangle &= \frac{2}{L} \int_0^L dx\, \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L dx\, \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \frac{\hbar}{i} \frac{\pi}{L} \cos \left(\frac{\pi}{L} x \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}^2 \rangle &= \frac{2}{L} \int_0^L dx\, \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L dx\, \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{L^2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{L^2}. \end{aligned}$$

Steht der Impulsoperator nicht zur Verfügung, kann man wie folgt argumentieren: Der Grundzustand ist eine Eigenfunktion des Hamiltonoperators und besitzt deshalb die feste Energie $E = \hbar^2 \pi^2 / (2mL^2)$. Also gilt

$$\langle \hat{H} \rangle = E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}.$$

Innerhalb des Potentialtopfes ist $V(x) = 0$. Deshalb ist

$$\langle \hat{H} \rangle \equiv \left\langle \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right\rangle = \left\langle \frac{\hat{p}^2}{2m} \right\rangle.$$

(Der Bereich außerhalb des Potentialtopfes spielt keine Rolle, weil dort die Wellenfunktion verschwindet). Nimmt man die beiden obigen Gleichungen zusammen, ergibt sich

$$\left\langle \frac{\hat{p}^2}{2m} \right\rangle = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}.$$

Der mittlere quadratische Impuls ist also $\langle \hat{p}^2 \rangle = \hbar^2 \pi / L^2$, wie oben formal berechnet. Leider kann der Mittelwert des Impulses nicht auf diese einfache Art gewonnen werden. Man kann aber leicht einsehen, daß $\langle \hat{p} \rangle = 0$ gelten muß, denn ein von Null verschiedener mittlerer Impuls würde bedeuten, daß sich – grob gesprochen – die Wellenfunktion als Ganzes mit einer gewissen Geschwindigkeit aus dem Potentialtopf herausbewegen würde.

Um die Unbestimmtheitsrelation für den Grundzustand des Potentialtopfes zu erhalten, muß jetzt nur noch das Produkt der beiden eben berechneten Varianzen gebildet werden:

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \hbar^2\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\right) > \frac{\hbar^2}{4}.$$

Diese Demonstration der Unbestimmtheitsrelation ist nicht besonders aufwendig und hat den Vorteil, daß die korrekten quantenmechanischen Begriffsbildungen benutzt werden. Der Umstand, daß tatsächlich etwas mit Hilfe des Formalismus berechnet wird, kann die Sicherheit im Umgang mit der Theorie fördern. Daneben kann die Rechnung auch leicht auf alle höheren Zustände verallgemeinert werden. Natürlich müssen die Schülerinnen und Schüler darauf hingewiesen werden, daß die Unbestimmtheitsrelation nicht nur für das spezielle Beispiel des Potentialtopfes gilt, sondern daß man die Relation

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 > \frac{\hbar^2}{4}$$

ganz allgemein für alle quantenmechanischen Systeme herleiten kann.

Bei der Ableitung der Impulsvarianz kann man sehr leicht dem folgenden Trugschluß erliegen: Wenn die kinetische Energie den festen Wert E besitzt, kann der Impuls nur die beiden diskreten Werte $\pm\sqrt{2mE}$ annehmen. Daß dies nicht richtig sein kann, sieht man schon daran, daß die Energie-Eigenfunktionen nicht zugleich Eigenfunktionen des Impulsoperators sind. Tatsächlich ist es sehr instruktiv, die Impulsverteilung für die verschiedenen Zustände zu berechnen und graphisch zu veranschaulichen. In einem folgenden Beitrag werden wir dies ausführlich diskutieren.

4. Beugung am Einzelspalt

Bei diesem Gedankenexperiment wird angenommen, daß Elektronen mit festem Impuls $\vec{p}_0$ in y-Richtung auf eine Blende mit einem Spalt der Breite d treffen (Abb. 4). Auf dem Schirm zeigt sich die charakteristische Beugungsfigur. Das Hauptmaximum befindet sich direkt hinter dem Spalt, die Interferenzminima 1. Ordnung findet man bei einem Winkel, der

$$\sin\alpha = \lambda/d \tag{3}$$

erfüllt, wobei $\lambda = h/p_0$ die dem Impuls p_0 zugeordnete de-Broglie-Wellenlänge ist.

Beim Durchgang durch den Spalt verringert sich die Orts-Unbestimmtheit des Elektrons in x-Richtung. Das Auftreten der Beugungsfigur wird so gedeutet, daß sich dadurch die Unbestimmtheit im Impuls vergrößert, daß also das Elektron mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eine von Null verschiedene Impulskomponente p_x besitzt. Zur quantitativen Herleitung der Unbestimmtheitsrelation muß das Beugungsmuster auf dem Schirm mit der Impulsverteilung der Elektronen am Spalt in Zusammenhang gebracht werden (denn nur die Streuung der Impulse direkt am Spalt ist von Interesse).

Nach der üblichen Argumentationsweise wird für die Ortsunbestimmtheit die Spaltbreite eingesetzt: $\Delta x = d$. Die Streuung Δp_x der Impulse in x-Richtung wird durch die Abweichung vom einlaufenden Impuls $p_x = 0$ definiert. Als Abschätzung für den typischen Querimpuls wird die Lage des ersten Minimums benutzt. Dazu wird einem Elektron, daß dort auf den Schirm trifft, anhand der geometrischen Konstruktion in Abb. 4 die Impulskomponente $p_x = |\vec{p}_0|\sin\alpha$ senkrecht zum Schirm zugeordnet. Durch Einsetzen von (3) erhält man dann die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim h.$$

Fragwürdig ist hier die Zuordnung eines festen Impulses zu einem Teilchen, daß an einer bestimmten Stelle auf den Schirm trifft. Die Argumentation soll ja gerade zeigen, daß das Elektron hinter dem Spalt *keinen* festen Impuls besitzt. Die in Abb. 4 gezeigte geometrische Veranschaulichung führt unmittelbar zur Vorstellung einer klassischen geradlinig gleichförmigen Bahn, die das Elektron vom Spalt zum Schirm genommen hat (gestrichelte Linie).

Das Problem liegt darin, aus der Intensitätsverteilung auf dem Schirm die Streuung der Impulse am Spalt zu erschließen. In der Tat läßt sich das gleiche Ergebnis, das aus der oben kritisierten Vorgehensweise folgt, in korrekter Weise aus der Quantenmechanik herleiten, ohne daß die Vorstellung einer klassischen Bahn herangezogen werden muß. Die genaue Rechnung, die im Anhang wiedergegeben ist, zeigt, daß die Ortsverteilung der Elektronen auf dem Schirm näherungsweise ein Abbild der Impulsverteilung am Spalt ist. Es läßt sich zeigen, daß die Wahrscheinlichkeit, am Ort x auf dem Schirm ein Elektron zu finden, proportional ist zur Wahrscheinlichkeit, am Spalt ein Elektron mit dem Impuls p_x zu finden, wobei x und p_x über die „klassische" Beziehung $p_x = p_0\, x/L = p_0 \tan\alpha \approx p_0 \sin\alpha$ zusammenhängen. Formaler ausgedrückt:

$$\psi_{\text{Schirm}}(x) \sim \phi_{\text{Spalt}}\left(p_x = \frac{p_0 x}{L}\right), \tag{4}$$

wobei $\phi_{\text{Spalt}}(p_x)$ die Impulsraum-Wellenfunktion am Spalt ist, deren Betragsquadrat die Wahrscheinlichkeit für den Impuls p_x festlegt.

Anschaulich kann man sich das folgendermaßen verdeutlichen: Am Spalt wird ein Wellenpaket präpariert, dessen Impulsverteilung in transversaler (also x-) Richtung wir feststellen möchten. Wie alle Wellenpakete zerfließt auch dieses auf dem Weg zum Schirm. Die freie Ausbreitung der einzelnen Impulskomponenten führt dazu, daß die Verteilung der Impulse sich als ein räumliches Muster auf dem Schirm zeigt, wenn dieser weit genug vom Spalt entfernt ist. Man kann die freie Ausbreitung des Wellenpakets und den Nachweis auf dem Schirm also als eine Messung der Impulsverteilung am Spalt ansehen.

Die quantitative Analyse zeigt somit, daß die Annahme einer klassischen Bahn zwischen Spalt und Schirm zwar das richtige Ergebnis liefert. Damit ist aber nicht gesagt, daß mit einer solchen Vorstellung unbedenklich weiter argumentiert werden darf. Im Gegenteil: Man sollte höchste Vorsicht walten lassen, bei den Schülerinnen und Schülern nicht die Vorstellung von klassischen Bahnen aufkommen zu lassen. Eine prinzipielle Möglichkeit, dies zu vermeiden, stellt die hier und im Anhang angegebene quantenmechanische Begründung dar, die mit einer reinen Wellenvorstellung arbeitet. Für den Gebrauch in der Schule ist die quantitative Analyse sicherlich zu kompliziert. Ein gangbarer Weg besteht aber darin, das Problem anzusprechen und seine Auflösung mit qualitativen Argumenten anschaulich zu erläutern.

Die Unbestimmtheitsrelation im Unterricht

Fassen wir die bisherige Diskussion dieser und der vorangegangen Arbeiten [1] in ihren Konsequenzen für den Schulunterricht zusammen:

a) Die Formulierung, daß Ort und Impuls nicht gleichzeitig beliebig genau gemessen werden können, sollte mit Vorsicht gebraucht werden, da es dazu Gegenbeispiele gibt (siehe z. B. [4]). Es handelt sich dabei um retrodiktive Messungen, die einen Aufschluß nur über vergangene Eigenschaften eines Quantenobjekts erlauben und nicht zu Vorhersagen über zukünftige Ereignisse verwendet werden können.

b) Die Interpretation der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation als Einschränkung in den Präpariermöglichkeiten auf bestimmte Eigenschaftspaare ist in jedem Falle korrekt. Diese Aussage kann zutreffend sowohl für Gesamtheiten formuliert werden – was wir vorziehen

– als auch für ein Einzelobjekt. Letzteres hieße dann: Quantenobjekte können nicht in einen Zustand gebracht werden, in dem sie gleichzeitig eine Orts- und eine Impulseigenschaft haben. (Eine Impulseigenschaft zu haben, bedeutet, daß mit der Wahrscheinlichkeit 1 der Impuls p_0 gemessen wird, oder mit anderen Worten: Jede Impulsmessung an einzelnen Quantenobjekten der Gesamtheit liefert den Meßwert p_0.) Ob es weiterführende Seinsaussagen für das einzelne Quantenobjekt gibt, läßt man offen.

c) Setzt man sich als Ziel, eine möglichst korrekte Herleitung der Unbestimmtheitsrelation im Unterricht anzubieten, bieten sich die beiden folgenden Möglichkeiten an: Zum einen kann man auf die weiter vorn beschriebene Betrachtung am Potentialtopf zurückgreifen. Für Leistungskurse ist das Nachvollziehen der Rechnung keine Schwierigkeit. Die andere Möglichkeit besteht darin, die Fourierzerlegung von Wellenpaketen anhand von einfachen Beispielen explizit zu diskutieren. Wellenpaket).

d) Für Grundkurse (und als Vorbereitung auf formale Betrachtungen auch für Leistungskurse) ist nach unserer Meinung eine heuristische oder nur erläuternde Behandlung am geeignetsten. Ausgehend von einem Beispiel der klassischen Mechanik kann die Aussage der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation erläutert werden: Um das Gesetz für die Bahnkurve beim horizontalen Wurf $y = -(g/2v_{x0}^2)x^2$ experimentell überprüfen zu können, muß ein Abschußgerät hergestellt werden, daß es erlaubt, Kugeln gleicher Masse mit möglichst identischen Anfangswerten $x_0 = y_0 = 0$, v_{x0}, $v_{y0} = 0$ abzuschießen (Abb. 5). Nur dann streuen die Bahnen wenig um die theoretisch vorausgesagte Kurve und die Kugeln schlagen in etwa am gleichen Ort auf dem Boden auf. Streuen die beobachteten Bahnen, kann dies an der nicht völlig korrekt berechneten Bahnkurve liegen, aber auch daran, daß die Kugeln nicht reproduzierbar vom gleichen Ort mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit abgeschossen werden. Um eine Entscheidung herbeizuführen, baut man eine neue Abschußvorrichtung, bei der die Streuung in den Anfangswerten kleiner ist und überprüft damit wieder die Bahnkurve. Nach den Erfahrungen der klassischen Mechanik gibt es keine prinzipielle untere Grenze für die gleichzeitige Verkleinerung der Streuungen bei den Paaren (x_0, v_{x0}) und (y_0, v_{y0}), so daß die Streuung der Bahnen immer kleiner wird.

Das Neue im Bereich von Quantenobjekten ist nun, daß der Bau eines Abschußapparates, der Quantenobjekte mit extrem kleinen Streuungen in x und p_x (bzw. y und p_y) reproduzierbar herstellt, nach der Quantentheorie nicht möglich ist und auch real bisher nicht gebaut werden konnte. Benutzen wir z. B. Photonen als Quantenobjekte. Mit einem monochromatischen Laser können wir Photonen herstellen, die extrem genau auf Impuls präpariert sind, z. B. ist die Streuung der p_y-Komponente praktisch Null. Versuchen wir durch Erweiterung des Präparationsapparates auch die Streuung der Ortskomponente y zu reduzieren, (sie ist bisher von der Größenordnung des Strahldurchmessers), indem wir einen Spalt davorsetzen, wird – wie die Demonstration zeigt – die Impulsstreuung Δp_y sofort größer. Mit anderen Worten: Wir sind prinzipiell nicht in der Lage, die Voraussetzung geringfügig streuender Anfangswerte zu schaffen, um theoretisch berechnete klassische Bahnen experimentell überprüfen zu können. Hier wird nur mitgeteilt, daß die Theorie die Beziehung

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

liefert.

Anmerkung: Mit den obigen Erläuterungen ist natürlich noch nicht ausgeschlossen, daß das einzelne Quantenobjekt eine klasische Bahn durchläuft. Da die Anfangswerte streuen, streuen auch die Auftrefforte bzw. Bahnen. Die Quantentheorie sagt ja mehr aus:

Zwar kann ein Quantenobjekt eine der beiden Eigenschaften „bestimmter Ort y_0“ oder „bestimmter Impuls p_0“ besitzen, jedoch nicht beide Eigenschaften gleichzeitig. Im allgemeinen werden allerdings weder Ort noch Impuls einen bestimmten Wert besitzen.

e) Die in vielen Schulbüchern verbreitete „Ableitung“ der Unbestimmtheitsrelation am Einzelspalt ist abzulehnen. Der Einwand, daß damit die klassische Bahnvorstellung bestärkt wird, wurde bereits weiter vorne erhoben. Der Wert der Querimpulskomponente ist ohne Annahme einer klassischen Bahn zunächst durch den Auftreffort nicht bestimmt. Wie die Rechnung im Anhang zeigt, existiert eine solche Relation zwar, ihre Ableitung ist mit schulischen Mitteln aber nicht durchführbar.

Weitere Einwände, die durchaus von aufmerksamen Schülerinnen und Schülern vorgebracht werden, lassen die Herleitung noch fragwürdiger erscheinen:

- Aus der Bedingung für das 1. Minimum, $\lambda = \Delta x \sin\alpha$, folgt (wenn sich der Impulsbetrag $p = h/\lambda$ nicht ändert, also λ konstant bleibt), daß der Grenzfall $\Delta x \to 0$ nicht betrachtet werden kann, da $\Delta x > \lambda$ gilt. In der Tat ändert sich in diesem Fall die physikalische Situation: Wird die Spaltbreite wesentlich kleiner als die Wellenlänge, wird die einfallende Welle reflektiert und es findet keine Beugung statt (s. [5]).
- Aus der Abschätzung der Querimpulsunschärfe durch $\Delta p_x = |\vec{p}_0| \sin\alpha$ folgt, daß Δp_x beschränkt ist durch $\Delta p_x \leq |\vec{p}_0|$, die Impulsstreuung also keinesfalls divergiert. Da diese Beschränkung unter der Voraussetzung, daß sich der Impulsbetrag des Quantenobjekts beim Durchflug durch den Spalt nicht ändert, immer gilt, hätte man den aufmerksamen Schülerinnen und Schüler sogar ein Gegenbeispiel für die Unbestimmtheitsrelation geliefert. (Daß die Unbestimmtheitsrelation am Einzelspalt natürlich doch gilt, läßt sich mit schulischen Mitteln nicht zeigen [5]).

Anhang: Impulsverteilung und Interferenzmuster beim Einzelspalt

Im vorletzten Abschnitt wurde wesentlich davon Gebrauch gemacht, daß beim Einzelspalt-Experiment die auf dem Schirm beobachtete Interferenzfigur als eine direkte Abbildung der Impulsverteilung am Spalt gedeutet werden kann. In diesem Anhang soll dies in quantenmechanisch korrekter Weise demonstriert werden.

Wir betrachten die in Abb. 4 gezeigte Situation: Von links fällt ein Elektronenstrahl mit gegebenem Impuls $\vec{p}_0$ auf eine Blende mit einem Einzelspalt. Der Spalt wird aus der einfallenden ebenen Welle ein kastenförmiges Stück „herausschneiden“. Dieses Wellenpaket wird sich in y-Richtung fortbewegen und dabei auch in x-Richtung seine Gestalt ändern, denn wie jedes Wellenpaket wird es im Lauf der Zeit zerfließen. In der Schirmebene wird aus der kastenförmigen Wahrscheinlichkeitsverteilung das bekannte Interferenzmuster.

Um unser Problem zu vereinfachen, verfolgen wir nur die Ausbreitung der Wellenfunktion in x-Richtung. Wir wollen von der detaillierten Beschreibung der Bewegung zum Schirm hin (in y-Richtung) absehen und einfach annehmen, daß sie nach den üblichen Wellengesetzen erfolgt. Zur Berechnung des Interferenzmusters auf dem Schirm fragen wir einfach nach der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Elektronen in x-Richtung zu einer bestimmten Zeit t, zu der die Welle am Schirm angelangt sein soll.

Die kastenförmige Wellenfunktion direkt hinter dem Spalt zur Zeit t_0 bezeichnen wir mit $\psi_{\text{Spalt}}(x, t_0)$. Eigentlich sind wir an der Impulsverteilung in der Spaltebene interessiert. Sie läßt sich am besten durch die Fouriertransformierte $\phi_{\mathrm{Spalt}}(p,t_0)$ der Wellenfunktion ausdrücken (der Einfachheit halber schreiben wir p statt p_x; der Index Spalt bzw. Schirm verdeutlicht das Zeitargument t_0 bzw. t):

$$\phi_{\mathrm{Spalt}}(p,t_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}dp\,e^{-\frac{i}{\hbar}px}\psi_{\mathrm{Spalt}}(x,t_0). \tag{5}$$

$\phi(p)$ heißt auch Wellenfunktion in der Impulsdarstellung. Ihr Betragsquadrat gibt die Wahrscheinlichkeit an, den Impuls p bei einer Messung in der Spaltebene zu finden. Auf ihre genaue Form kommt es bei dem Argument nicht an.

Für die freie Bewegung zwischen Spalt und Schirm tritt im Hamiltonoperator nur die kinetische Energie auf: $\hat{H}=\hat{p}^2/(2m)$. In diesem Fall nimmt die Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\hat{H}\psi(x,t)$$

in der Impulsdarstellung die einfache Gestalt

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(p,t)=\frac{p^2}{2m}\phi(p,t)$$

an, wobei p kein Operator, sondern eine gewöhnliche Zahl ist. Die Lösung kann man sofort hinschreiben:

$$\phi(p,t)=\mathrm{const}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}(t-t_0)}.$$

Mit der Anfangsbedingung

$$\phi(p,t_0)=\phi_{\mathrm{Spalt}}(p,t_0)$$

erhält man

$$\phi_{\mathrm{Schirm}}(p,t)=e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}(t-t_0)}\phi_{\mathrm{Spalt}}(p,t_0).$$

Diese Formel liefert die Impulsverteilung zur Zeit t (also am Schirm). Eigentlich sind wir aber an der räumlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung (in Abhängigkeit von dem Impulswert) auf dem Schirm interessiert, die ja letztlich das dort sichtbare Interferenzmuster beschreibt. Wir müssen also zur Orts-Wellenfunktion zurücktransformieren, was durch die Umkehrung der Fouriertransformation (5) geschieht:

$$\psi_{\mathrm{Schirm}}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}dp\,e^{+\frac{i}{\hbar}px}\phi_{\mathrm{Schirm}}(p,t_0).$$

Das ergibt:

$$\psi_{\mathrm{Schirm}}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}dp\,\exp\left(\frac{i}{\hbar}px-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}(t-t_0)\right)\phi_{\mathrm{Spalt}}(p,t_0). \tag{6}$$

Diese Gleichung erfüllt den beabsichtigten Zweck: Sie verknüpft die räumliche Verteilung der Elektronen auf dem Schirm (zur Zeit t) mit der Impulsverteilung in der Spaltebene (zur Zeit t_0).

Es verbleibt noch die Aufgabe, das kompliziert aussehende Integral in (6) zu lösen. Es hat die Form

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}dp\,e^{if(p)}\phi_{\mathrm{Spalt}}(p,t_0).$$

Für Integrale dieser Form gibt es eine Standardmethode zur näherungsweisen Auswertung: die Methode der stationären Phase [6]. Sie beruht auf der Tatsache, daß nicht alle p-Werte aus dem Integrationsintervall gleichermaßen beitragen: Wenn sich die Funktion $f(p)$ über ein kleines p-Intervall stark ändert, oszilliert die Exponentialfunktion stark, so daß das Integral über dieses Teilintervall fast Null wird und es nichts zum Gesamtintegral beiträgt. Die einzigen nennenswerten Beiträge kommen aus den Regionen, wo sich die Funktion $f(p)$ nur schwach ändert, wo also $f'(p) = 0$ wird. Diese Gegenden des Integrationsintervalls nennt man die Punkte der stationären Phase.

Bei unserem Problem können wir mit dieser Methode bestimmen, welche Impulskomponenten am Spalt hauptsächlich zum Interferenzbild am Ort x auf dem Schirm beitragen. Die Phase im Integral (6) ist

$$f(p) = \frac{1}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}(t - t_0)\right).$$

Der Punkt $p_s(x)$, an dem $f'(p_s)$ verschwindet, ist:

$$p_s(x) = \frac{mx}{t - t_0}.$$

Wir können das noch umformen, indem wir die Zeitdifferenz $t - t_0$ durch den Abstand L zwischen Spalt und Schirm und den Impuls der einlaufenden Welle $\vec{p}_0$ ausdrücken: $|\vec{p}_0|/m \approx L/(t_1 - t_0)$. Dabei ist angenommen worden, daß sich die Wellenfronten in y-Richtung auch hinter dem Spalt nahezu ungestört ausbreiten. Dies ergibt

$$p_s(x) = |\vec{p}_0|\frac{x}{L} \approx |\vec{p}_0| \sin\alpha.$$

Dies ist die gleiche Beziehung zwischen Impuls und Ort auf dem Schirm, die oben anhand der geometrischen Konstruktion in Abb. 4 hergeleitet wurde.

Im Prinzip ist damit unser Ziel erreicht. Wir haben festgestellt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron am Ort x auf dem Schirm auftrifft, fast vollständig durch eine bestimmte Impulskomponente in der Spaltebene festgelegt ist. In diesem Sinn ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Schirm ein Abbild der Impulsverteilung am Spalt. Der Ort, dessen Schwärzung die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Impulskomponente anzeigt, ist mit dem zugehörigen Impuls durch die klassische Beziehung verbunden, die sich aus Abb. 4 mit der Annahme einer gleichförmig geradlinigen Bahn ergibt. Es muß jedoch noch einmal betont werden, daß dieses Ergebnis auf quantenmechanische Weise mit reinen Wellenvorstellungen abgeleitet wurde, ohne daß von der Vorstellung einer klassischen Bahn Gebrauch gemacht wurde.

Es ist auch möglich, mit der Methode der stationären Phase noch weiterzugehen und einen Näherungsausdruck für das Integral (6) zu ermitteln. Dazu entwickelt man die Phase in der Exponentialfunktion bis zur zweiten Ordnung. Wenn man annimmt, daß die Funktion $\phi(p)_{\text{Spalt}}$ sich am Punkt p_s der stationären Phase nur langsam ändert, kann man das Integral auswerten und erhält allgemein [6]:

$$\psi_{\text{Schirm}}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{if(p)}\phi_{\text{Spalt}}(p,t_0) \tag{7}$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{i\hbar R}}\exp(iS)\,\phi_{\text{Spalt}}(p_s(x),t_0), \tag{8}$$

wobei $S = f(p = p_s(x))$ und $R = -f''(p = p_s(x))$. Setzt man die konkreten Werte $R = (t - t_0)/(\hbar m)$ und $S = mx^2/(2\hbar(t - t_0))$ für unser Problem ein, erhält man

$$|\psi_{\text{Schirm}}(x,t)|^2 = \frac{2\pi m}{t - t_0}|\phi_{\text{Spalt}}(p_s(x),t_0)|^2,$$

was genau der oben angegebenen Beziehung (4) entspricht.

Literatur

[1] R. Müller, H. Wiesner, *Die Interpretation der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation*, Physik in der Schule **35**, 218 (1996).

[2] B. Davies, Integral Transforms and Their Applications, Springer-Verlag, New York, 1978.

[3] U. Wegener, *Zur Behandlung der Heisenbergschen Unschärferelation in einigen Schulbüchern*, Siegener Pädagogische Studien **24**, 47 (1978).

[4] H. Wiesner, R. Müller, *Die Ensemble-Interpretation der Quantenmechanik*, Physik in der Schule **34**, 343, 379 (1996).

[5] A. Ziegler, H. Wiesner, *Interpretationsprobleme bei der Heisenbergschen Unschärferelation und ihre Behandlung im Unterricht*, in: Didaktik der Physik, Vorträge der Physikertagung, Duisburg 1995, S. 272.

[6] C. Eckart, *The Approximate Solution of One-Dimensional Wave Equations*, Rev. Mod. Phys. **20**, 399 (1948).

Adressen der Autoren

Dr. Rainer Müller, Sektion Physik der Universität München, Theresienstr. 37, 80333 München.

Prof. Dr. Dr. Hartmut Wiesner, Lehrstuhl für Didaktik der Physik,
Sektion Physik der Universität München, Schellingstr. 4, 80799 München.

Bildbeschriftungen

Abb. 1: Schema des Heisenberg-Mikroskops.

Abb. 2: Veranschaulichung der Impuls-Komponenten, die sich bei der Konstruktion von Wellenpaketen gegenseitig auslöschen.

Abb. 3: Grundzustand des Potentialtopfes mit unendlich hohen Wänden.

Abb. 4: Geometrische Verhältnisse bei der Beugung am Einzelspalt.

Abb. 5: Horizontaler Wurf.