$5 + 2 < 6$

$3 \cdot 3 = 9$

$b \cdot 0 = 0$

$4 \cdot a = 1$

Alle hier anwesenden Personen sind SchülerInnen dieser Schule

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\right) \epsilon \mathbb{N}^*$$

x ist ein beliebtes Kinderlied

Nehmen Sie Stellung!

Einstiegsfolie -Lehrperson

$3 \cdot 3 = 9$

AUSSAGE
richtig

5 + 2 < 6

AUSSAGE
falsch

$b \cdot 0 = 0$

AUSSAGEFORM
AUSSAGE richtig für alle reellen b

$4 \cdot a = 1$

AUSSAGEFORM
AUSSAGE richtig für a = 0,25

Alle hier anwesenden Personen sind SchülerInnen der FLS

AUSSAGE falsch, da Lehrer anwesend

x ist ein beliebtes Kinderlied

AUSSAGEFORM
AUSSAGE richtig z.B. für „Lalelu…“.

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\right) \epsilon \mathbb{N}^*$$

AUSSAGE
richtig

Tafelbild: Definitionen von Aussage und Aussageform

Def.:
Eine **Aussage** ist eine Formulierung, der man einen der beiden Wahrheitswerte „wahr“ bzw. „falsch“ zuordnen kann.

Bsp.:
„2+3 = 5“ und „Tim ist ein Junge“ sind wahre Aussagen.
„9:4 = 2“ und „Rom liegt in der BRD“ sind falsche Aussagen.

Def.:
Eine **Aussageform** ist eine Formulierung mit einer Variablen und wird zu einer Aussage, wenn man für die Variable ein Element der Grundmenge einsetzt.
Man schreibt A(x).

Bsp.:
„5 a = 1“ ist eine Aussageform und wird mit a = 1/5 und a Element von G zu einer wahren Aussage, „3 b =0“ ist eine Aussageform und ist eine wahre Aussage für alle Elemente aus G.

Def.:
Falls L = G, so nennt man die Aussageform bzgl. G **allgemeingültig**.
Falls L $\neq \emptyset$, so bezeichnet man die Aussageform bzgl. G **erfüllbar**.
Falls L = $\emptyset$, so heißt die Aussageform bzgl. G **nicht erfüllbar**.

Bsp. $3 + 0 \cdot x < 4$ allgemeingültig für G = $\mathbb{Q}$.
x^2 - 3 = 0 ist für $\mathbb{Q}$ nicht erfüllbar, wohl aber für $\mathbb{R}$.

Arbeitsauftrag: Bearbeiten Sie folgende Übungsaufgaben.

Sozialform: Partnerarbeit

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob eine Aussageform bzw. eine Aussage vorliegt. Bestimmen Sie im letzteren Fall den Wahrheitswert.

a) $\frac{1}{2} + \frac{7}{8} < 1$

b) $2 \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{4} \epsilon \mathbb{N}$

c) $5x^2 - 5x = 0,\ G = \mathbb{N}$ hat mindestens eine Lösung.

d) $x^2 - x = 2$ hat die Lösung 0,5.

Aufgabe 2

Äußern Sie sich zu „Die Aussage $x^2 = 3$ ist falsch“.

Aufgabe 3

Entscheiden Sie über Allgemeingültig-, Erfüllbar- bzw. Nichterfüllbarkeit.

a) $0 \cdot x = 0$ bzgl. $\mathbb{R}$

b) $-x < 0$ bzgl. $\mathbb{R}_+^*$

c) $2x^2 < 2x$ bzgl. $\mathbb{Q}$

d) $\frac{x+2}{x} > 1$ bzgl. $\mathbb{Q}$

e) $2x = 5\ bzgl.\ \mathbb{Z}$

Lösung

Arbeitsauftrag: Bearbeiten Sie folgende Übungsaufgaben.
Sozialform: Partnerarbeit

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob eine Aussageform bzw. eine Aussage vorliegt. Bestimmen Sie im letzteren Fall den Wahrheitswert.

a) $\frac{1}{2}+\frac{7}{8}<1$ Aussage , falsch

b) $2\cdot\frac{7}{8}+\frac{1}{4}\epsilon\mathbb{N}$ Aussage, richtig

c) $5x^2-5x=0,\ G=\mathbb{N},$ hat mindestens eine Lösung. Aussage richtig, $L=\{0,1\}$

d) $x^2-x=2$ hat die Lösung 0,5. Aussage falsch

Aufgabe 2

Äußern Sie sich zu „Die Aussage x²=3 ist falsch".
1. Aussageform statt Aussage,
2. Es fehlt der Definitionsbereich, z.B. auf $\mathbb{Q}$ falsche Aussage für alle Elemente, auf $\mathbb{R}$ richtige Aussage für $x=\sqrt{3}$

Aufgabe 3

Entscheiden Sie über Allgemeingültig-, Erfüllbar- bzw. Nichterfüllbarkeit.

a) $0\cdot x=0\ bzgl.\ \mathbb{R}$ L=$\mathbb{R}$ → allgemeingültig

b) $-x<0\ bzgl.\ \mathbb{R}_+^*$ L= $\mathbb{R}$ →allgemeingültig

c) $2x^2<2x\ bzgl.\ \mathbb{Q}$ L≠ ∅ →erfüllbar

d) $\frac{x+2}{x}>1\ bzgl.\ \mathbb{Q}$ L≠ ∅ →erfüllbar

e) $2x=5\ bzgl.\ \mathbb{Z}$ L= ∅ →nicht erfüllbar

Folie:

<u>Arbeitsauftrag:</u>

Erarbeiten Sie sich weitere Themengebiete der Aussagenlogik selbstständig im Rahmen einer Arbeitstheke.

Es gibt fünf voneinander unabhängige Themen mit folgendem Aufbau:
- Infobox
- Definition
- Standardaufgaben

Eigenkontrolle durch Kontrollstation.

Bearbeitungszeit: 2 Unterrichtsstunden

Zielsetzung des Unterrichtsarrangements:

- Individuelle Auseinandersetzung mit den Lerninhalten
- Selbstständige Zeiteinteilung und damit Lernen im eigenen Tempo innerhalb eines vorgegebenen Zeitrahmens
- Bearbeitungsreihenfolge der Lerninhalte nach persönlicher Präferenz
- Individuelle Hilfe durch die Lehrperson während andere Schülerinnen und Schüler weiterarbeiten können

→Training von selbstständigem und selbst-verantwortlichem Lernen („Uni-Lernen“)

Konjunktion

Arbeitsauftrag: Erarbeiten Sie sich das Thema „Konjunktion“ selbstständig. Arbeiten Sie dazu nachfolgende
Infobox durch und versuchen Sie anschließend das neue Wissen auf die anschließende Aufgabe anzuwenden. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an der Kontrollstation.

Infobox

Angenommen an einem Tag scheint die Sonne und gleichzeitig regnet es.
Dann wäre die Aussage „Die Sonne scheint“ und auch die Aussage „Es regnet“ richtig.
Wenn nun also die beiden Teilaussagen wahr sind, so muss es auch die zusammengesetzte Aussage „Die Sonne scheint und es regnet.“ sein. Eine solche Aussagenverknüpfung heißt Konjunktion. Man verwendet das Symbol $\wedge$ *, das für „und“ steht.*

Definition:
Wenn p und q Aussagen sind, dann ist es auch die Konjunktion $p \wedge q$ eine Aussage. Ferner ist $p \wedge q$ genau dann wahr, wenn sowohl p als auch q den Wahrheitswert wahr annehmen.
Ebenso können Aussageformen P(x) und Q(x) verknüpft werden, sofern sie die gleiche Grundmenge haben.

Bsp. $\underbrace{(2 \cdot 4 = 8)}_{\text{Aussage p}} \wedge \underbrace{(5 - 3 = 1)}_{\text{Aussage q}}$ ist eine falsche Aussage, weil die zweite Teilaussage falsch ist.

$3 < x \wedge x < 5 \; bzgl. \; \mathbb{R}$ ist eine Verknüpfung von zwei Aussageformen, die durch sinniges Einsetzen zu Aussagen werden.

Fazit:
Ist p wahr und ist q wahr, dann ist die Konjunktion wahr.
Ist die Konjunktion wahr so sind es auch p und q.
Ist die Konjunktion falsch so sind p und q falsch oder p falsch und q richtig oder
p richtig und q falsch.

Aufgabe

a) Gegeben seien folgende Aussagen:

A: 5 ist eine ungerade Zahl
B: 6 ist ein Vielfaches von 3
C: |-1| > 1
D: 20 ist durch 4 teilbar
E: 9 ist eine Primzahl
Bestimmen Sie den Wahrheitswert von $A \wedge B, A \wedge C, B \wedge D, C \wedge D, D \wedge E, C \wedge E$.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Aussageformen:

$(4 < x) \wedge (x = 14)$
$(x^2 = x) \wedge (x > 0)\ bzgl. \mathbb{Q}$

Konjunktion LÖSUNG

Aufgabe

a) Gegeben seien folgende Aussagen:

A: 5 ist eine ungerade Zahl
B: 6 ist ein Vielfaches von 3
C: |-1| > 1
D: 20 ist durch 4 teilbar
E: 9 ist eine Primzahl
Bestimmen Sie den Wahrheitswert von

$\boldsymbol{A \wedge B}$:

A	B	$\boldsymbol{A \wedge B}$
wahr	wahr	wahr

$\boldsymbol{A \wedge C}$:

A	C	$\boldsymbol{A \wedge C}$
wahr	falsch	falsch

$\boldsymbol{B \wedge D}$:

B	D	$\boldsymbol{B \wedge D}$
wahr	wahr	wahr

$\boldsymbol{C \wedge D}$:

C	D	$\boldsymbol{C \wedge D}$
falsch	wahr	falsch

$\boldsymbol{D \wedge E}$:

D	E	$\boldsymbol{D \wedge E}$
wahr	falsch	falsch

$\boldsymbol{C \wedge E}$:

C	E	$\boldsymbol{C \wedge E}$
falsch	falsch	falsch

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Aussageformen:

$(4 > x) \wedge (x = 14)$ Die Konjunktion ist falsch und daher existiert keine Lösungsmenge.

$(x^2 = x) \wedge (x > 0)\ bzgl.\, \mathbb{Q}$ L = {1}

Adjunktion

Arbeitsauftrag: Erarbeiten Sie sich das Thema „Adjunktion“ selbstständig. Arbeiten Sie dazu nachfolgende Infobox durch und versuchen Sie anschließend das neue Wissen auf die anschließende Aufgabe anzuwenden. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an der Kontrollstation.

Infobox

Angenommen eine Schülergruppe fährt auf Exkursion und hat zwei Ziele zur Auswahl: das Deutsche Museum und den Bundestag.
Dann wäre die Aussage „Wir fahren ins Deutsche Museum oder zum Bundestag“ richtig, wenn die Schülergruppe ins Deutsche Museum fährt. Die Aussage wäre aber auch richtig, wenn sie zum Bundestag fährt. Auch wenn sie zu beiden Zielen fährt, ist die Aussage richtig. Fährt die Schülergruppe allerdings zu keinem der Ziele, so ist die Aussage falsch. Man spricht hierbei von einer Adjunktion und verwendet das Symbol $\vee$, *das für „oder“ steht.*

Definition:
Wenn p und q Aussagen sind, dann ist es auch die Adjunktion $p \vee q$ eine Aussage. Ferner ist $p \vee q$ genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen p oder q den Wahrheitswert wahr annimmt.
Wenn P(x) und Q(x) Aussageformen sind, dann ist es auch die Adjunktion $P(x) \vee Q(x)$, die dann eine wahre Aussage darstellt, wenn mindestens eine der Aussageformen eine wahre Aussage darstellt.

Bsp. $(15 > 5) \vee (12 < -5)$ ist eine wahre Aussage, weil mindestens eine Teilaussage wahr ist.

Die Lösungsmenge der Aussageform $x^2 > 2\ bzgl.\ \mathbb{R}$ lautet
$L = \{x \in \mathbb{R} | x > \sqrt{2} \vee x < -\sqrt{2}\}$.

Fazit:

Ist p wahr und ist q wahr, dann ist die Adjunktion wahr.

Ist p wahr und q falsch, dann ist die Adjunktion wahr.

Ist p falsch und q wahr, dann ist die Adjunktion wahr.

Ist p als auch q falsch, so ist die Adjunktion falsch.

Aufgabe

a) Gegeben seien folgende Aussagen:

A: 5 ist eine ungerade Zahl
B: 6 ist ein Vielfaches von 3
C: Köln ist eine Hauptstadt
D: 20 ist durch 4 teilbar
E: Alle Menschen haben schwarze Haare.
Bestimmen Sie den Wahrheitswert von $A \vee B, A \vee E, B \vee D, C \vee D, D \vee E, C \vee E$.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Aussageformen ($G = \mathbb{R}$):

$(x > 4) \vee (x \leq 4)$

$(x > 11) \vee (x < 11)$

$(x = 10) \vee (x > 7)$

Adjunktion LÖSUNG

Aufgabe

a) Gegeben seien folgende Aussagen:

A: 5 ist eine ungerade Zahl
B: 6 ist ein Vielfaches von 3
C: Köln ist eine Hauptstadt
D: 20 ist durch 4 teilbar
E: Alle Menschen haben schwarze Haare.
Bestimmen Sie den Wahrheitswert von
$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$:

A	B	$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$
wahr	wahr	wahr

$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{E}$:

A	E	$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{E}$
wahr	falsch	wahr

$\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{D}$:

B	D	$\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{D}$
wahr	wahr	wahr

$\boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{D}$:

C	D	$\boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{D}$
falsch	wahr	wahr

$\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{E}$:

D	E	$\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{E}$
wahr	falsch	wahr

$\boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{E}$:

C	E	$\boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{E}$
falsch	falsch	falsch

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Aussageformen:

$(x > 4) \vee (x \leq 4)$	L= $\mathbb{R}$
$(x > 11) \vee (x < 11)$	L= $\mathbb{R}\backslash\{11\}$
$(x = 10) \vee (x > 7)$	L=$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$

Implikation

Arbeitsauftrag: Erarbeiten Sie sich das Thema „Implikation“ selbstständig. Arbeiten Sie dazu nachfolgende Infobox durch und versuchen Sie anschließend das neue Wissen auf die anschließende Aufgabe anzuwenden. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an der Kontrollstation.

Infobox

Angenommen jemand trifft die Aussage „Wenn der Rasensprenger an ist, dann ist der Rasen nass.“ Diese Schlussfolgerung ist richtig, sofern der Rasensprenger richtig angeschlossen ist und auch sonst alle technischen Voraussetzungen erfüllt sind. Man spricht bei dieser Folgerung von einer Implikation und verwendet das Symbol $\Rightarrow$, das für „impliziert, folgt bzw. dann“ steht.

Bei der Implikation muss darauf geachtet werden, dass der Rückschluss nicht gelten muss! Beispielsweise könnte der Rasen auch nass sein, weil es geregnet hat.

Definition:
Wenn p und q Aussagen sind, dann ist die Aussagenverbindung $p \Rightarrow q$ eine falsche Aussage, sofern p wahr und q falsch ist, z.B. p: 2+5=7, q: 2-1=5. Andernfalls nimmt sie den Wahrheitswert wahr an.
Seien A(x) und B(x) Aussageformen, G die Grundmenge und L(A(x)) und L(B(x)) die Lösungsmengen, so ist die Implikation $A(x) \Rightarrow B(x)$ eine Aussage, die den gleichen Wahrheitswert wie die Aussage $L(A(x)) \subseteq L(B(x))$ hat.

Bsp. $\text{p}: 2+5=7,\ \text{q}: 2-1=5,\ p \Rightarrow q$ ist eine falsche Aussage

$\text{p}: 4-1=3,\ \text{q}: 3>1,\ p \Rightarrow q$ ist eine wahre Aussage

$\text{p}: 2>8,\ \text{q}: 2-1=1,\ p \Rightarrow q$ ist eine wahre Aussage

$\text{p}: 6+2=-1,\ \text{q}: -1$ ist eine natürliche Zahl, $p \Rightarrow q$ ist eine wahre Aussage

Fazit:

Eine Aussage $p \Rightarrow q$ ist wahr, wenn die Folgerung q wahr ist. So ist der logische Schluss wahr, wenn sowohl p als auch q falsch sind. D.h.:

Ist p wahr und ist q wahr, dann ist der logische Schluss wahr.

Ist p wahr und ist q falsch, dann ist der logische Schluss falsch.

Ist p falsch und ist q wahr, dann ist der logische Schluss wahr.

Ist p falsch und ist q falsch, dann ist der logische Schluss wahr.

Beachte: Eine Implikation ist bereits dann wahr, wenn p falsch ist. Dies wird „ex falso quodlibet“ bezeichnet („Aus Falschem folgt Beliebiges.“).

Aufgabe

a) Entscheiden Sie über den Wahrheitswert (Der erste Satzteil sei p, der zweite sei q.).
   1) Wenn Rom in der BRD liegt, dann ist Steinkohle schwarz.
   2) Wenn Rom in der BRD liegt, dann ist Steinkohle grün.
   3) Wenn Rom in Italien liegt, dann ist Steinkohle schwarz.
   4) Wenn Rom in Italien liegt, dann ist Steinkohle grün.
   5) Wenn Wasser trocken ist, dann ist heute ein Schultag.

b) Entscheiden Sie.
   1) Jeder Teiler von 6 ist auch Teiler von 12, G= $\mathbb{N}$
   2) $a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$
   3) $b \neq b \Rightarrow b = 4$
   4) A: 6 ist eine ungerade Zahl, B: 2 ist eine Primzahl, $A \Rightarrow B$

Implikation **LÖSUNG**

Aufgabe

a) Entscheiden Sie über den Wahrheitswert (Der erste Satzteil sei p, der zweite sei q.).
   1) Wenn Rom in der BRD liegt, dann ist Steinkohle schwarz.
   2) Wenn Rom in der BRD liegt, dann ist Steinkohle grün.
   3) Wenn Rom in Italien liegt, dann ist Steinkohle schwarz.
   4) Wenn Rom in Italien liegt, dann ist Steinkohle grün.
   5) Wenn Wasser trocken ist, dann ist heute ein Schultag.

1)

p	q	$p \Rightarrow q$
falsch	wahr	wahr

2)

p	q	$p \Rightarrow q$
falsch	falsch	wahr

3)

p	q	$p \Rightarrow q$
wahr	wahr	wahr

4)

p	q	$p \Rightarrow q$
wahr	falsch	falsch

5)

p	q	$p \Rightarrow q$
falsch	vielleicht wahr, vielleicht falsch	wahr

b) Entscheiden Sie.

1) Jeder Teiler von 6 ist auch Teiler von 12, G= $\mathbb{N}$

A(x) stehe für Teiler von 6 und B(x) stehe für Teiler von 12.
Teiler von 6 sind 2, 3 und 6.
Teiler von 12 sind 2, 3, 4 und 6.
Es gilt $L(A(x)) \subseteq L(B(x))$.
Somit wahre Aussage

2) $a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$

Wahre Aussage

3) $b \neq b \Rightarrow b = 4$

Wahre Aussage, da $b \neq b$ falsch ist und „ex falso quodlibet“

4) A: 6 ist eine ungerade Zahl, B: 2 ist eine Primzahl, $A \Rightarrow B$

A falsch, B wahr, $A \Rightarrow B$ wahr

Äquivalenz

Arbeitsauftrag: Erarbeiten Sie sich das Thema „Äquivalenz“ selbstständig. Arbeiten Sie dazu nachfolgende Infobox durch und versuchen Sie anschließend das neue Wissen auf die anschließende Aufgabe anzuwenden. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an der Kontrollstation.

Infobox

Haben Säugetiere ein X- und ein Y-Chromosom, dann sind sie männlich. Die weiblichen Säugetiere hingegen haben zwei X-Chromosomen. Man kann also folgendes formulieren: Wenn ein Säugetier ein X- und ein Y-Chromosom hat, dann ist es männlich. Genauso könnte man sagen: Ein Säugetier ist genau dann männlich, wenn es ein X- und ein Y-Chromosom hat. Die Gleichwertigkeit zwischen zwei Aussagen nennt man Äquivalenz und verwendet das Symbol $\Leftrightarrow$.

Definition:
Zwei Aussagen p und q nennt man genau dann äquivalent ($p \Leftrightarrow q$), wenn sowohl $p \Rightarrow q$ als auch $q \Rightarrow p$ gilt, d.h. die Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben.
Seien A(x) und B(x) Aussageformen, G die Grundmenge und L(A(x)) und L(B(x)) die Lösungsmengen, so heißen A(x) und B(x) äquivalent, wenn $L(A(x)) = L(B(x))$.

Bsp. p: x ist eine gerade Zahl, q: x ist durch 2 teilbar.
$p \Leftrightarrow q$ ist eine wahre Aussage, weil die Aussageformen p und q je nach für x eingesetzter Zahl entweder gleichzeitig wahr oder falsch sind.

Fazit:
Ist p wahr und ist q wahr, dann ist die Äquivalenz wahr.
Ist p wahr und q falsch, dann ist die Äquivalenz falsch.
Ist p falsch und q wahr, dann ist die Äquivalenz falsch.
Ist p als auch q falsch, so ist die Äquivalenz wahr.

Aufgabe

a) Gegeben seien folgende Aussagen:

A: 7 ist eine ungerade Zahl
B: 2 ist eine Primzahl
C: 9 ist eine Primzahl
D: 8 ist eine ungerade Zahl
Bestimmen Sie den Wahrheitswert von $A \Leftrightarrow B, C \Leftrightarrow D, D \Leftrightarrow A, C \Leftrightarrow B, A \Leftrightarrow C$.

b) Entscheiden Sie über den Wahrheitswert.

1) $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$
2) $3 = 4 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 = 8$
3) $|-2| < -1 \Leftrightarrow 5 + 7 = 12$

Äquivalenz LÖSUNG

a) Gegeben seien folgende Aussagen:

A: 7 ist eine ungerade Zahl
B: 2 ist eine Primzahl
C: 9 ist eine Primzahl
D: 8 ist eine ungerade Zahl
Bestimmen Sie den Wahrheitswert von

$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$:

A	B	$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$
wahr	wahr	wahr

$\boldsymbol{C \Leftrightarrow D}$:

C	D	$\boldsymbol{C \Leftrightarrow D}$
falsch	falsch	wahr

$\boldsymbol{D \Leftrightarrow A}$:

D	A	$\boldsymbol{D \Leftrightarrow A}$
falsch	wahr	falsch

$\boldsymbol{C \Leftrightarrow B}$:

C	B	$\boldsymbol{C \vee D}$
falsch	wahr	falsch

$\boldsymbol{A \Leftrightarrow C}$:

A	C	$\boldsymbol{A \Leftrightarrow C}$
wahr	falsch	falsch

b) Entscheiden Sie über den Wahrheitswert.

1) $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$ wahr
2) $3 = 4 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 = 8$ wahr
3) $|-2| < -1 \Leftrightarrow 5 + 7 = 12$ falsch

Negation

Arbeitsauftrag: Erarbeiten Sie sich das Thema „Negation“ selbstständig. Arbeiten Sie dazu nachfolgende Infobox durch und versuchen Sie anschließend das neue Wissen auf die anschließende Aufgabe anzuwenden. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an der Kontrollstation.

Infobox

Aussagen können verneint werden. Nimmt man die Aussage „Es regnet!“ und es regnet tatsächlich, dann ist die Aussage wahr. Die Verneinung der Aussage hat dann den Wahrheitswert falsch, also „Es regnet nicht!“, wenn es tatsächlich regnet. Man muss beachten, dass beispielsweise die Aussage „Es scheint die Sonne“, nicht die Verneinung der ursprünglichen Aussage ist, denn es könnte sein, dass es bewölkt ist, es aber nicht regnet.
Man spricht beim Verneinen einer Aussage vom Negieren und verwendet das Symbol ¬.

Definition:
Die Negation $\neg p$ einer Aussage p ist eine Aussage und p und $\neg p$ haben entgegengesetzte Wahrheitswerte.
Ebenso werden Aussageformen negiert. $\neg A(x)$ ist die Aussageform, die bei beliebigem Einsetzen eines Grundmengenelements zu einer falschen Aussage führt, wenn A(x) bei Einsetzung des Grundmengenelements wahr ist.

Bsp. p: Es gilt $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, q: Es gilt nicht $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
Die Aussage p ist falsch. Die Aussage q ist die Negation von p, also $\neg p$, und ist wahr.

Fazit: Ist p wahr, so muss $\neg p$ falsch sein.
Ist p falsch, so muss $\neg p$ wahr sein.

Beachte: Eine negierte Aussage p ist genau dann wahr, wenn die Aussage p falsch ist.
Statt der Schreibweise $\neg p$ kann auch $\overline{p}$ geschrieben werden.

Aufgabe

a) Gegeben seien folgende Aussagen:

A: 7 ist eine ungerade Zahl
B: 4 ist eine Primzahl
C: $5 > 3$
D: Songschreiber verdienen ihr Geld mit dem Schreiben von Songs.
Bestimmen Sie jeweils die Negation.

b) Negieren Sie:

A: Alle Mathe+ - Schülerinnen und Schüler wissen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
B: Jede Primzahl ist ungerade.

Negation **LÖSUNG**

a) A: 7 ist eine ungerade Zahl — $\neg A$: 7 ist keine ungerade Zahl

wahr — falsch

B: 4 ist eine Primzahl — $\neg B$: 4 ist keine Primzahl

falsch — wahr

C: 5>3 — $\neg C$: 5<3

wahr — falsch

D: Songschreiber verdienen ihr Geld mit dem Schreiben von Songs.
wahr

$\neg D$: Songschreiber verdienen kein Geld mit dem Schreiben von Songs.
falsch

A: Alle Mathe+ - Schülerinnen und Schüler wissen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

$\neg A$: Es gibt mindestens einen/eine Mathe+ - Schüler/in, der /die nicht weiß, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

B: Jede Primzahl ist ungerade.
$\neg B$: Nicht jede Primzahl ist ungerade.
Vorsicht: Die Negation lautet nicht „Jede Primzahl ist gerade“, denn entweder muss die Aussage oder die negierte Aussage richtig sein.