

Numerische Integration

Wenn sich zu einer Funktion keine Stammfunktion angeben lässt, dann kann man das Integral $\int_a^b f(x) dx$ nicht exakt berechnen. In solchen Fällen muss man sich mit einem Näherungswert zufrieden geben.

Ein Beispiel für eine solche Funktion ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-x^2}$ (vgl. Gaußsche Glockenkurve auf dem ehemaligen 10 DM-Schein)



Auch der GTR und Computerprogramme berechnen Integrale häufig mit Hilfe von numerischen Verfahren.

Alle numerischen Verfahren sind mit einem großen Rechenaufwand verbunden. Die Qualität eines Verfahrens kann man daher daran messen, wie „schnell“ das Verfahren „gute“ Näherungen liefert.

Lernschritte:

1. Kennenlernen folgender Verfahren: Rechteckmethode; Sehnentrapezregel; Keplersche Fassregel.
2. Vergleich der Näherungswerte am Beispiel der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für $n = 2$.
3. Verbesserung der Näherungswerte durch größere n mit Hilfe von geogebra.

Lernschritt 1:

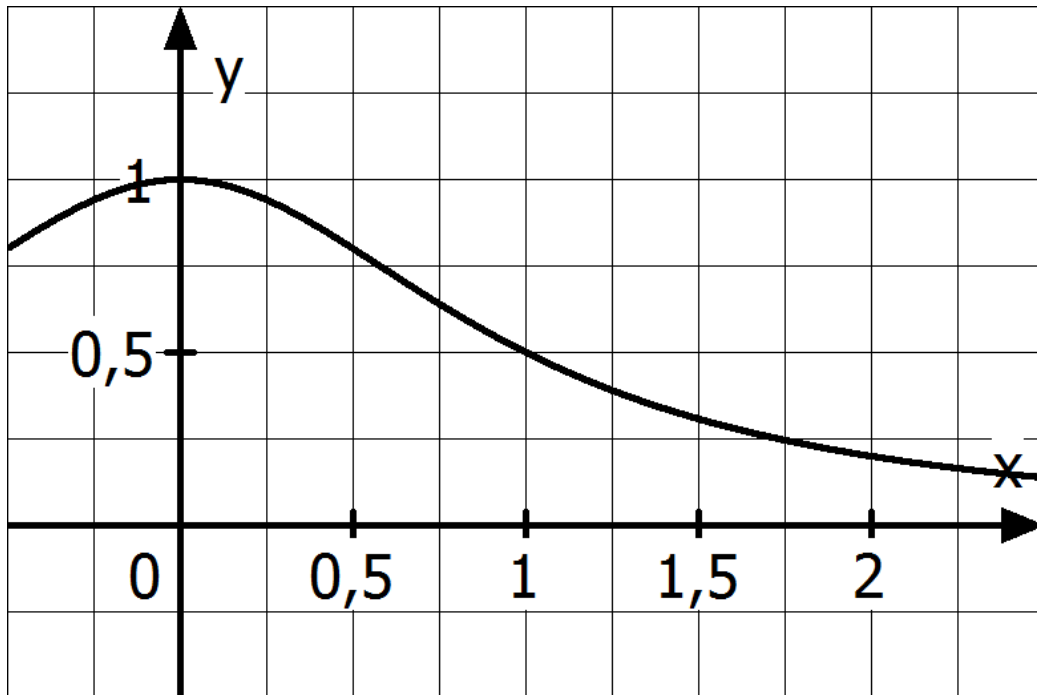
Recherchieren Sie im Internet, welche Idee dem jeweiligen Verfahren zu Grunde liegt.

Lernschritt 2:

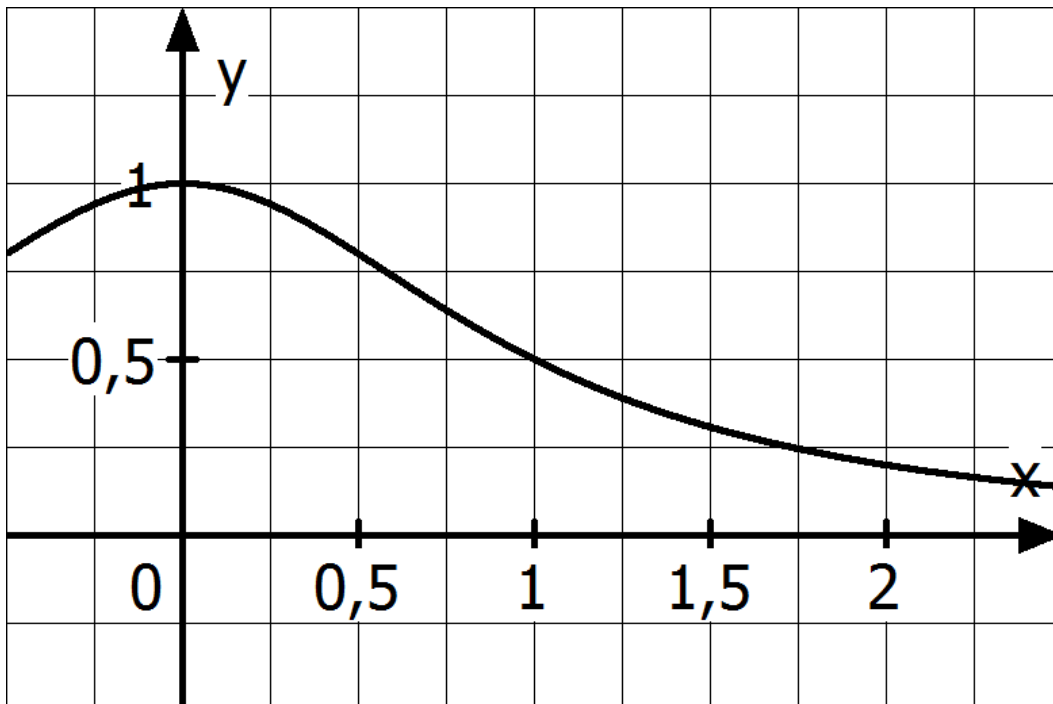
- Gegeben ist nun die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Diese Funktion hat sogar eine Stammfunktion (vgl. Formelsammlung: $F(x) = \arctan(x)$), die wir aber ohne Nachweis verwenden.

$$\text{Es gilt: } \int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(2) - \arctan(0) \approx 1,107149$$

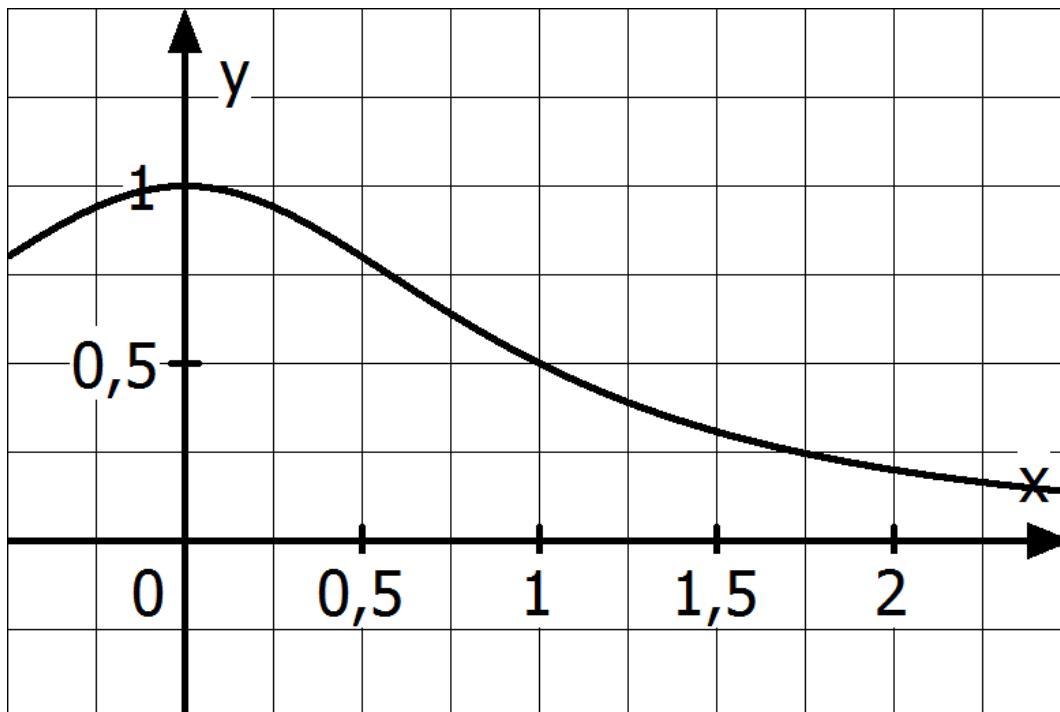
Rechteckmethode: Unterteilen Sie die Fläche in zwei Rechtecke und bestimmen Sie den Näherungswert für den Flächeninhalt mit der Rechteckmethode.



Sehnentrapezmethode: Unterteilen Sie die Fläche in zwei Sehnentrapeze und bestimmen Sie den Näherungswert für den Flächeninhalt mit der Sehnentrapezmethode.



Keplersche Fassregel: Bestimmen Sie eine Parabel mit den Stützstellen 0; 1 und 2. Zeichnen Sie diese Parabel in das Koordinatensystem ein. Bestimmen Sie damit den Näherungswert (exakt und mit 6 Nachkommastellen) für den Flächeninhalt.



Lernschritt 3:

Vervollständigen Sie folgende Tabellen mit Hilfe von GeoGebra-Animationen:

Rechteckmethode:

Anzahl der Rechtecke	$n = 4$	$n = 10$	$n = 20$			
Näherungswert für den Flächeninhalt						

Sehnentrapezmethode:

Anzahl der Trapeze	$n = 4$	$n = 10$	$n = 20$			
Näherungswert für den Flächeninhalt						

Fazit: Vergleichen Sie die Verfahren bezüglich der Genauigkeit und des Rechenaufwandes.

Weitere Verfahren: Recherchieren Sie im Internet weitere Verfahren zur numerischen Integration.

www.mathi.uni-heidelberg.de/~thaeter/anasem08/Isenhardt.pdf