

3. Fachtag „SINUS Profil Mathematik an Grundschulen“
Stuttgart, den 20.11.2014

Produktiver Mathematikunterricht:
Authentische Anlässe zum Dokumentieren und Argumentieren

1. Einleitung: Eine Aufgabe und ihr argumentatives Potenzial
2. Begriffsklärung - Ein Blick in die Argumentationstheorien
3. Mathemathhaltige Erzählanlässe: Argumentativ strukturierte Geschichten
4. Präalgebraische Notationen: Rechenterme als Argumentationsbasis
5. Elementares Modellieren: Sachmathematische Strukturen als Argumentationsbasis

1. Einleitung: Eine Aufgabe und ihr argumentatives Potenzial

Analyse:

Die Aufgaben regen nicht zum *Nachdenken* an:

1. Die Eigenschaften der Rechenergebnisse werden nicht zum Phänomen.
2. Die Struktur wird nicht dokumentiert
3. Die Struktur entsteht nicht aus einem Problem und muss nicht zur Lösung eines Problems genutzt werden

Die Struktur besitzt für die Aufgaben keine argumentative Relevanz

1. Einleitung: Eine Aufgabe und ihr argumentatives Potenzial

vgl. Nührenböcker / Schwarzkopf 2010

Zahlentafel für die Lupe

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Versuche, alle Zahlen zwischen 71 und 80 zu treffen...

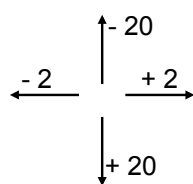
Kind 1:

...indem du zwei nebeneinander stehende Zahlen addierst

Kind 2:

...indem du zwei untereinander stehende Zahlen addierst

Vergleicht eure Ergebnisse:
Wer hat welche Zahlen getroffen?



Ergebnistafel

2	3	4	5	6	7	8	9	10	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
12	14	15	16		18	20									117			120
21		24	25		27	28	30		121						127			130
32		35	36				40								137			140
42		45			48	49	50								157			160
		54	56				60								167	169	170	
		63	64				70								177			180
		72					80								187			190
															196	197		200

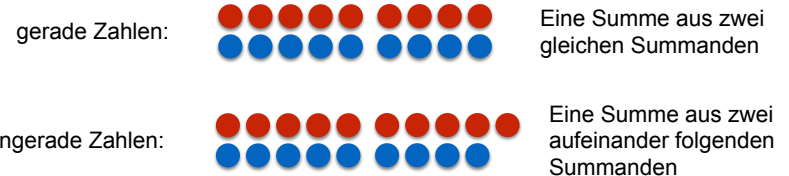
1. Einleitung: Eine Aufgabe und ihr argumentatives Potenzial

Analyse:

Die Aufgaben regen zum *Nachdenken* an:

1. Die Eigenschaften der Rechenergebnisse werden zum Phänomen.
2. Die Struktur wird dokumentiert
3. Die Struktur entsteht aus einem Problem

Die Struktur besitzt für die Aufgaben argumentative Relevanz





Analyse:

Die Aufgaben regen zum *Nachdenken* an:

1. Die Eigenschaften der Rechenergebnisse werden zum Phänomen.
2. Die Struktur wird dokumentiert
3. Die Struktur entsteht aus einem Problem

Die Struktur besitzt für die Aufgaben *argumentative Relevanz*

Summanden nebeneinander: 

Summanden übereinander: 

Ein Blick in die Argumentationstheorie (z.B. Klein 1980, Miller 1986)

Mehrere Personen handeln kooperativ: **5 Freunde wollen Fußball spielen.**

Eine strittige Frage tritt auf, die das weitere kooperative Handeln unterbricht: **Wie spielt man mit einer ungeraden Anzahl von Kindern Fußball?**

Die Beteiligten suchen nach einer Lösung, die von allen akzeptiert wird und eine Fortführung der Kooperation ermöglicht:

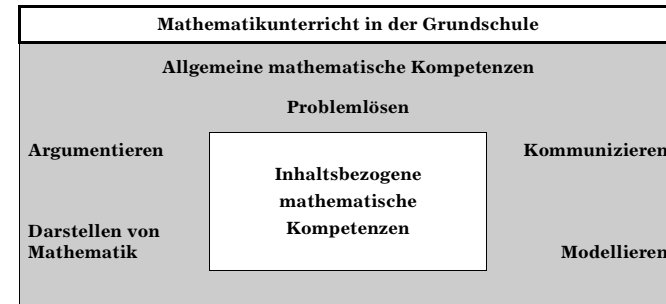
- Man versucht, sich auf einen Lösungsvorschlag zu einigen
- Man spielt auf ein Tor**
- Ein Kind spielt den Schiedsrichter**
- Eine Mannschaft ist um ein Kind größer**
- Man sucht noch nach einem sechsten Kind**
- Man spielt doch lieber Verstecken....**

Die Argumentation wird beendet

Das kooperative Handeln wird auf der Basis der gefundenen Lösung fortgeführt

Die Kooperation zerbricht

Bildungsstandards 2004



Mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen
 Mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln
 Begründungen suchen und nachvollziehen

Ein Blick in die Argumentationstheorie (z.B. Klein 1980, Miller 1986)

Mehrere Personen handeln kooperativ: **5 Freunde wollen Fußball spielen.**

Eine strittige Frage tritt auf, die das weitere kooperative Handeln unterbricht: **Wie spielt man mit einer ungeraden Anzahl von Kindern Fußball?**

(Kollektive) Die Bemühungen um eine einvernehmliche Auflösung **Argumentation:** einer Strittigkeit zur Weiterführung der Kooperation

Max Miller untersucht *fundamentale* Lernprozesse: Nur in der sozialen Gruppe und aufgrund der sozialen Interaktionsprozesse zwischen den Mitgliedern einer Gruppe kann das einzelne Individuum jene Erfahrungen machen, die fundamentale Lernschritte ermöglichen.

Nur *ein* sozialer bzw. kommunikativer Handlungstyp scheint diese Bedingung zu erfüllen, und diese ist der *kollektive Diskurs* oder, um einen etwas genaueren Terminus zu verwenden, die *kollektive Argumentation*" (Miller 1986)

Das kooperative Handeln wird auf der Basis der gefundenen Lösung fortgeführt

Die Kooperation zerbricht

Ein Blick in die Argumentationstheorie (z.B. Klein 1980, Miller 1986)

Mehrere Personen handeln kooperativ: **5 Freunde wollen Fußball spielen.**

Eine strittige Frage tritt auf, die das weitere kooperative Handeln unterbricht: **Wie spielt man mit einer ungeraden Anzahl von Kindern Fußball?**

(Kollektive) Die Bemühungen um eine einvernehmliche Auflösung
Argumentation: einer Strittigkeit zur Weiterführung der Kooperation

Das argumentative [...] Austragen zwischenmenschlicher Konflikte gleich welcher Art erzeugt für die meisten der daran Beteiligten einen erheblichen Stress, dem sich offenbar niemand ohne wirklich zwingende Gründe unterwerfen mag (Miller 1986)

Das kooperative Handeln wird auf der Basis der gefundenen Lösung fortgeführt

Die Kooperation zerbricht

Projekt „PEndEL“:

Praxisnahe Entwicklungsprojekte
im **Dialog** mit **Erzieherinnen** und **Lehrkräften**
Nührenbörger / Schwarzkopf

Ansätze:

Das Erzählen und Argumentieren in Ergänzung zueinander nutzen

Mathematikhaltige Erzählanlässe / explizite Argumentationen müssen **initiiert** werden!

Authentische Anlässe durch „*Produktive Irritationen*“:

(Nührenbörger / Schwarzkopf 2013)

Situationen, die „zum Fragen, Beobachten, Nachdenken anreizen, also eine Lücke, eine Störung, eben etwas Fragwürdiges enthalten“ (Winter 1976)

Wann fängt das Argumentieren an?

Jedenfalls ehe es einen Namen hat (Krauthausen 2002)

Ein Blick in die Argumentationstheorie (z.B. Klein 1980, Miller 1986)

Mehrere Personen handeln kooperativ: **5 Freunde wollen Fußball spielen.**

Eine strittige Frage tritt auf, die das weitere kooperative Handeln unterbricht: **Wie spielt man mit einer ungeraden Anzahl von Kindern Fußball?**

Beobachtungen zum Mathematikunterricht der Grundschule (Krummheuer 1997):

das „auf der kommunikativen Oberfläche [...] im Grunde nur über Rechnungen gesprochen wird“.

Die Argumentation löst sich in „*Erzählungen*“ auf,

eher „argumentatives Lernen“ im Erzählen
als „Lernen, zu argumentieren“

Das kooperative Handeln wird auf der Basis der gefundenen Lösung fortgeführt

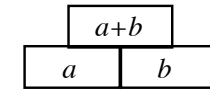
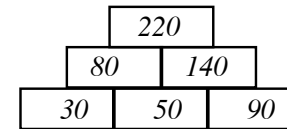
Die Kooperation zerbricht

„Man lernt weder durch Belehrung allein noch durch Beschauen der Umwelt allein Mathematik. Aber man kann zu Mathematik kommen, wenn man über Wirklichkeitsbereiche nachdenkt.

Dieses **Nachdenken** ist kein einfaches Imitieren, sondern ein **aktiver, schöpferischer Prozess**, die Bildung eines Modells auf irgendeinem **Sprachniveau**.“ (Winter 1976, 340)

Quelle: R. Butschkow: „Da stimmt doch was nicht!“, Bastei Lübbe 2011

Substantielle Aufgabenformate (Wittmann, z.B. 1994):



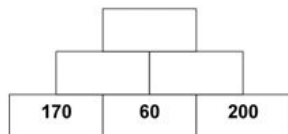
In jedem Stein steht die Summe aus den beiden darunter stehenden Zahlen

Beispiel 1: Frühstückspause Non-verbale Dokumentationen

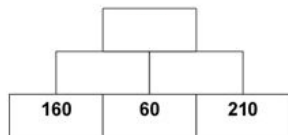
Beispiel 2: Fußballspiel

4. Präalgebraische Notationen: Rechenterme als Argumentationsbasis
Zahlenmauern und Rechenmauern

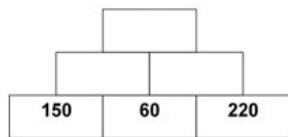
Max und Julian (vierte Klasse)



Regelmäßigkeit wird nicht zum Phänomen:



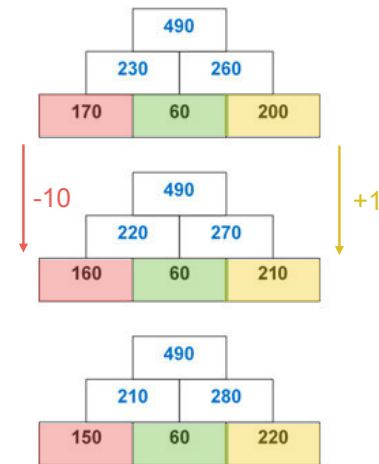
„+1-1=0“ gehört zur Routine.



4. Präalgebraische Notationen: Rechenterme als Argumentationsbasis
Zahlenmauern und Rechenmauern

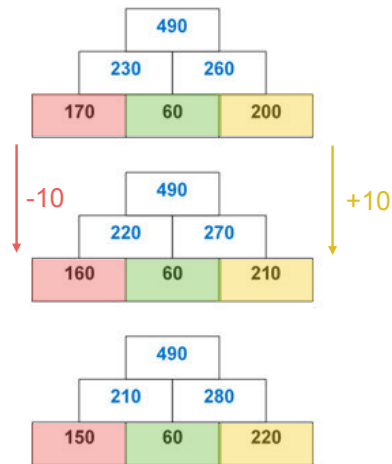
Hilfe zur Dokumentation und Argumentation: Farben und Pfeile

Vgl. <http://pikas.dzlm.de>



Hilfe zur Dokumentation und Argumentation: Farben und Pfeile

Vgl. <http://pikas.dzlm.de>



Problem:

$$\begin{array}{ccc}
 3 \cdot 5 & \xleftarrow{-5} & 4 \cdot 5 \\
 \downarrow +1 & & \uparrow = \\
 4 \cdot 4 & \xrightarrow{+4} & 5 \cdot 4
 \end{array}$$

Deswegen wichtig:
Produktive Irritationen zur
 Vertiefung der Reflexion über die
 Strukturen

Nicht nur die Zahlen, sondern die Rechenterme müssen in den Fokus rücken!

Fazit 02: Authentische Anlässe zur Argumentation

Argumentation zur Ausräumung einer Irritation:
 Eine sicher geglaubte Prognose trifft nicht zu.

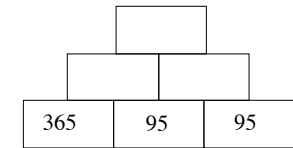
Argumente: Gegenargumente zur eigenen Prognose werden entwickelt

Dokumentation: Die Darstellung der Rechnungen öffnet den Blick auf die Strukturen.

Produktivität: Sichtweisen der Kinder ändern sich von anfänglich eher „konkreten Gewohnheiten mit Summen“ hin zu strukturellen Einsichten in Zahlenmauern.



Wichtig: Irritationen zum *Nachdenken* über die Strukturen



Einforderung einer Prognose: Kommt hier auch 650 in den Zielstein?

Einforderung einer Begründung: Wie kommt Ihr zu der Prognose?

Überprüfung der Prognose: Ausrechnen

Produktive Irritation: Prognose ist nicht haltbar - „stimmt doch“

Ausräumen der Irritation: Rechenmauern aufstellen;
 Vergleich der Rechenterme und nicht mehr nur der Zahlen

Die Welt der Dinge ist zugleich Ausgangspunkt wie Zielpunkt des Lernens [...]. Grundsätzlich ist hierzu keine vernünftige Alternative in Sichtweite.

Heinrich Winter 1994

In den Niederlanden leben ungefähr 14 Millionen Einwohner, deutlich weniger als die mehr als drei Milliarden, die in den USA leben. In den Vereinigten Staaten leben also mehr als 200-mal so viele Bürger wie in den Niederlanden. Die Fläche der Niederlande beträgt ungefähr 40.000 Quadratmeter, die der USA hingegen 33.000 Quadratkilometer, was etwa 1000-mal so viel ist.

Finde die Fehler in der Zeitungsmeldung

Vorbereitung der Behandlung

Gemeinsames Lesen des Texts

Kleingruppenarbeit:

Konzentration auf Aspekte zur Überprüfung

Gegenseitige Präsentation und Diskussion der Ergebnisse vor der ganzen Klasse

Fazit 03: Authentische Anlässe zur Argumentation

Argumentation zur Ausräumung einer Irritation:

Unsinnige Fakten werden durch eigene Repräsentanten entlarvt

Argumente: Dienen der Widerlegung von (scheinbar) sicheren Informationsquellen

Dokumentation: Erstellung und Erläuterung von Plakaten für die Diskussionsrunde

Produktivität: Konstruktion von sachmathematischen Strukturen zur Herstellung von Beziehungen zu glaubwürdigen Fakten

In den Niederlanden leben ungefähr 14 Millionen Einwohner, deutlich weniger als die mehr als drei Milliarden, die in den USA leben. In den Vereinigten Staaten leben also mehr als 200-mal so viele Bürger wie in den Niederlanden. **Die Fläche der Niederlande beträgt ungefähr 40.000 Quadratmeter, die der USA hingegen 33.000 Quadratkilometer, was etwa 1000-mal so viel ist.**

Ein unstrittiges Argument:

40.000 qm entsprechen gerade mal fünf Fußballfeldern.

Reichen die 33.000 km² für 3 Milliarden Einwohner, wenn jeder eine 50qm-Wohnung besitzt?

Laura: aber das ist doch, wenn jede Person, jede Person hat doch keine eigene Wohnung!

Michael: ja aber wir meinen ja so ne kleine Wohnung. so wie du wohnst.

Ein strittiges Argument:

Darf man mit Wohnungen rechnen, die es gar nicht gibt?

Produktiver Mathematikunterricht: Das Fazit am Ende

Authentische Anlässe zum Dokumentieren und Argumentieren

Argumentationen / argumentativ strukturierte Erzählungen sind *die* Zugänge zum (gemeinsamen) Nachdenken über Mathematik.

Argumentationen entstehen im Unterricht nicht von selbst, sondern sie müssen *initiiert* werden.

Es gibt keinen „geschlossenen Lehrgang“ im Argumentieren - wichtig ist die Pflege einer argumentativen Unterrichtskultur.

Produktive Irritationen

sollen die *Routine* im Handeln aufbrechen

zum (gemeinsamen) Nachdenken *über* die mathematischen Strukturen anregen

zur Vertiefung und Vernetzung des mathematischen Wissens beitragen.