

Fixpunktiteration

1. Definition

Ein Fixpunkt ist ein Punkt der Koordinatenfläche, der durch eine gegebene Abbildung durch die Funktion $y = f(x)$ auf sich selbst abgebildet wird.

Ein Fixpunkt erfüllt die Gleichung $f(x) = x$.

Aufgrund dieser allgemeinen Definition kann man erkennen, dass ein Fixpunkt der Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der ersten Winkelhalbierenden ist.

Definition:

Sei M eine Menge und $f: M \rightarrow M$ eine Funktion. Dann heißt ein Punkt $x \in M$ Fixpunkt, falls er die Gleichung $f(x) = x$ erfüllt.

2. Fixpunktiteration

1. Die Gleichung muss zuerst in eine Fixpunktgleichung der Form $f(x) = x$ umgeformt werden.

2. Anschließend wählt man einen beliebigen Wert x_0 aus dem gegebenen Intervall bzw. ein Startwert x_0 ist vorgegeben.

3. Die Rechenfolge lautet:

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1)$$

$$x_3 = f(x_2)$$

...

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

Unter geeigneten Voraussetzungen nähert sich die so erhaltene Folge einer Lösung von $f(x) = x$ immer weiter an.

Erhält man ein Ergebnis, das mit der Gleichung $x_{k+1} = f(x_k)$ übereinstimmt, so hat man den gesuchten Fixpunkt der Funktion gefunden.

3. Rechenbeispiel

$$I=[0,1;0,5]$$

$$f(x) = -2x^2 + 2x$$

$$\rightarrow x = -2x^2 + 2x$$

$$\text{Startwert } x_0 = 0,1$$

$$f(0,1) = 0,18 = x_1$$

$$f(0,18) = 0,295 = x_2$$

$$f(0,295) = 0,416 = x_3$$

$$f(0,416) = 0,486 = x_4$$

$$f(0,486) = 0,499 = x_5$$

$$f(0,499) = 0,499 = x_6$$

