

Der indirekte Beweis

Ein Beispiel:

Der Verdächtige X steht vor Gericht. Der Staatsanwalt liest die Anklageschrift vor:

„...Herr X hat am 1.10. zwischen 23.00 und 23.15 Uhr im Uhrengeschäft XY einen Einbruch verübt.“

Die Staatsanwaltschaft muss z.B. durch Zeugenaussagen beweisen, dass die Anklage berechtigt ist, damit der Verdächtige verurteilt wird.

Der Verdächtige X behauptet natürlich das Gegenteil, nämlich dass er unschuldig ist:

„Ich habe den Einbruch nicht begangen.“

Auch Herr X wird versuchen, seine Aussage zu beweisen, um freigesprochen zu werden. Dabei hat er Glück. Zu der fraglichen Zeit war er nämlich mit mehreren Freunden zusammen. Er sagt also zu seiner Verteidigung: „Wenn ich den Einbruch begangen hätte, dann hätte ich am 1.10. zwischen 23.00 und 23.15 Uhr im Uhrengeschäft XY sein müssen. Da ich aber nachweislich an einem anderen Ort war, kann ich nicht der Täter sein.“

Dieser leicht verständliche „Alibibeweis“ ist nichts anderes als ein indirekter Beweis.

Beim indirekten Beweis geht man so vor:

1. Man nimmt an, dass das Gegenteil der Behauptung gälte und zieht daraus Folgerungen.
2. Man führt die Argumentation zu einem Widerspruch
3. Da der Beweisgang logisch war und aus etwas Richtigem nicht etwas falsches folgen kann, muss die Annahme falsch und die Behauptung richtig sein

- ✓ Bringen Sie den berühmten Beweis von Euklid in die richtige Reihenfolge. (Hinweis: kann anschließend aufgeklebt werden.)

Behauptung: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Annahme: Es gibt endlich viele Primzahlen.

Dann gibt es eine größte Primzahl p_m .

Weiterhin können wir dann die endliche Menge aller Primzahlen wie folgt aufschreiben:

$\{2; 3; 5; \dots; p_m\}$

Wir bilden nun die Zahl N , indem wir alle Primzahlen multiplizieren und eins addieren.

$N = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_m + 1$ und wir unterscheiden zwei Fälle.

Erster Fall:

N ist eine Primzahl.

Dann ist $N > p_m$.

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass p_m die größte Primzahl ist.

Also war unsere Annahme in diesem Fall falsch.

Zweiter Fall:

N ist keine Primzahl, daher kann N in Primfaktoren zerlegt werden.

Dann muss N durch eine Primzahl teilbar sein.

Wenn wir N durch 2 teilen, so bleibt der Rest

Wenn wir N durch 3 teilen, so bleibt der Rest

Wenn wir N durch p_m teilen, so bleibt der Rest

Somit ist N durch keine der Primzahlen $2; 3; \dots; p_m$ teilbar.

Aber N kann in Primfaktoren zerlegt werden.

Also muss es Primfaktoren größer als p_m geben.

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass p_m die größte Primzahl ist.

Also war unsere Annahme falsch und die Behauptung ist bewiesen.