

Zusammenfassung

Der Artikel bietet Anregungen zur Lehrplaneinheit 2 (Beweistechniken). Konkret sollen drei wesentliche Fähigkeiten trainiert werden:

1. Das Anstellen einer Vermutung hinsichtlich Korrektheit einer Aussage und darauf aufbauend das Formulieren eigener Vermutungen.
2. Die Präzisierung oder Nachbesserung einer derartigen Vermutung, insbesondere mittels eines Beweisversuches.
3. Der mathematisch korrekte Nachweis einer allgemeinen Behauptung oder deren Widerlegung durch ein Gegenbeispiel.

Es geht nicht darum, mehrere Standard-Beweistechniken kennen zu lernen und schon gar nicht um möglichst kreatives Beweisen. Der Nachweis der Behauptungen geschieht vielmehr im Wesentlichen durch „Nachrechnen“ und wird primär als Handwerkszeug benutzt. Aber auch das will gelernt – und geübt! – sein. Kreativität ist dafür bei den ersten beiden Punkten gefordert. Die Symmetrie von Funktionen eignet sich für diese Zwecke gut. Der Nachweis von Symmetrie ist einfach, ziemlich bekannt und leicht verständlich. Trotzdem wird oft das Ausprobieren an einzelnen Stellen fälschlich als Beweis angesehen. Deshalb kann am Beispiel symmetrischer Funktionen gut erläutert werden, wann ein echter Beweis nötig ist und was diesen ausmacht und wann ein einziges Gegenbeispiel genügt. Die ausgewählten Aufgaben können leicht reduziert oder aber ergänzt werden. Die beispielhaft gezeigte Einheit kann also sehr gut auf einen vorgegebenen Zeitrahmen skaliert werden. Die Darreichung geschieht als Lückentext, bei der ich an eine Verwendung als Arbeitsblatt denke. Auch andere Verwendungen, etwa als Grundlage für eine GFS, sind möglich.

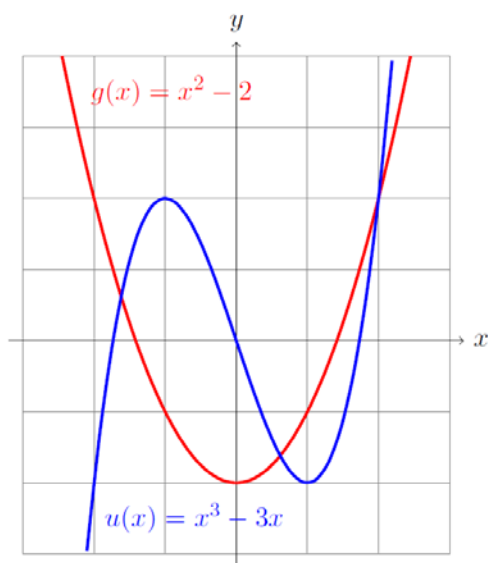
Symmetrische Funktionen

Der Einfachheit halber werden nur überall definierte Funktionen betrachtet.

Definition 1.1. Eine derartige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ...

- ... gerade wenn $f(-x) = f(x)$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$.
- ... ungerade wenn $f(-x) = -f(x)$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild zeigt (in rot) eine gerade Funktion g und (in blau) eine ungerade Funktion u . Die Graphen gerader Funktionen $y = f(x)$ sind symmetrisch zur y -Achse. Die Graphen ungerader Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.



Dass g tatsächlich gerade und u ungerade ist, kann bewiesen werden.

Beweis. Es ist nämlich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(-x) &= & &= g(x) \\ u(-x) &= \end{aligned}$$

Natürlich reicht es nicht aus, die jeweilige Bedingung ($f(-x) = f(x)$ bei geraden bzw.

$f(-x) = -f(x)$ bei ungeraden Funktionen) an einer einzelnen Stelle zu prüfen. Die Bedingung muss an allen Stellen gelten. Das kann für allgemeine Funktionen niemals durch einzelne Überprüfungen – und seien es noch so viele – sicher gestellt werden.

Symmetrische Polynome

Bei speziellen Funktionen kann aber die Überprüfung der Bedingung an endlich vielen Stellen ausreichend sein. Das gilt insbesondere bei Polynomen.

Definition 2.1. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

wobei $n \in \mathbb{N}$; $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ heißt (reelles) **Polynom**.

Die Zahlen a_i heißen **Koeffizienten** des Polynoms. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der Grad des Polynoms, der höchste von Null verschiedene Koeffizient legt also den **Grad** fest.

Sind alle Koeffizienten Null, so ist f das **Nullpolynom**. Es hat keinen festgelegten Grad. (Alternativ kann man den Grad des Nullpolynoms als -1 definieren.)

Polynome vom Grad 2

Ein Polynom f vom Grad 2 hat stets die Form $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit $a_2 \neq 0$. Für $a_2 = 0$ ist der Grad kleiner als 2.

Satz 2.1. Ein Polynom f vom Grad ≤ 2 mit $f(-x_1) = f(x_1)$ an einer einzigen Stelle $x_1 \neq 0$ muss gerade sein.

Beweis. Die Berechnung

$$\begin{aligned} 0 &= f(-x_1) - f(x_1) = \\ &= [a_2(-x_1)^2 + a_1(-x_1) + a_0] - [a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0] = \\ &= [a_2 x_1^2 - a_1 x_1 + a_0] - [a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0] = -2a_1 x_1 \end{aligned}$$

führt zu $a_1 x_1 = 0$. Wegen $x_1 \neq 0$ muss also $a_1 = 0$ sein. Das Polynom lautet folglich $f(x) = a_2 x^2 + a_0$. Diese Funktion ist aber gerade. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$f(-x) = a_2(-x)^2 + a_0 = a_2 x^2 + a_0 = f(x)$$

Aufgabe 2.1. Muss ein Polynom f vom Grad ≤ 2 mit $f(-x_1) = -f(x_1)$

an einer einzigen Stelle $x_1 \neq 0$ ungerade sein? Versuchen Sie den Beweis des vorangegangenen Satzes zu übertragen. Was vermuten Sie? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Um zu zeigen, dass eine allgemeine Regel nicht richtig ist, genügt also die Angabe eines einzigen **Gegenbeispiels**.

Überprüfung an zwei Stellen

Um sicher zu sein, dass ein Polynom vom Grad ≤ 2 ungerade ist, muss die Bedingung $f(-x) = -f(x)$ an zwei „verschiedenen“ Stellen überprüft werden.

Aufgabe 2.2. Das klappt dafür auch noch bei einem Polynom dritten Grades $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Zeigen Sie das. Versuchen Sie dabei, den Begriff „verschiedene“ Stellen zu präzisieren. Vervollständigen Sie dann den entsprechenden mathematischen Satz.

Satz 2.2. Ein Polynom f vom Grad ≤ 3 ist ungerade, wenn $f(-x_1) = -f(x_1)$ und $f(-x_2) = -f(x_2)$ an zwei Stellen x_1 und x_2 mit

Aufgabe 2.3. Welche Schlussfolgerungen sind möglich, wenn $f(-x) = f(x)$ an zwei „verschiedenen“ Stellen gilt? Für welchen Polynom-Grad ist eine Aussage möglich? Formulieren und beweisen Sie den entsprechenden mathematischen Satz.

Satz 2.3.

Bei der Bedingung $f(-x) = f(x)$ für gerade Funktionen machen natürlich – wie schon bei Polynomen zweiten Grades – nur von 0 verschiedene Stellen einen Sinn.

Beweis.

Rationale Polynome

Bei jedem Polynom reicht die Überprüfung der Symmetrie-Bedingung an endlich vielen Stellen aus. Je höher aber der Grad des Polynoms ist, desto mehr Stellen werden benötigt.

Ein rationales Polynom, also ein Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

bei dem alle Koeffizienten a_i ($0 \leq i \leq n$) rational sind, scheint hierbei zunächst keine Sonderrolle zu spielen. Seit Mitte des 19-ten Jahrhunderts weiß man aber, dass viele reellen Zahlen nicht als Nullstellen von rationalen Polynomen auftreten können. (Das Nullpolynom muss dabei natürlich ausgenommen werden.) Zu diesen Zahlen, die man **transzendent** nennt, gehören π und e .

Aufgabe 2.4. Eine Zahl, die Nullstelle eines rationalen Polynoms vom Grad $n \geq 1$ sein kann, heißt algebraisch. Zeigen Sie, dass $\sqrt[3]{2}$, $1 + \sqrt{7}$ und alle rationalen Zahlen algebraisch sind.

Aufgabe 2.5. Wie können Sie mit möglichst wenigen Funktionsauswertungen überprüfen, ob ein rationales Polynom f symmetrisch (gerade oder ungerade) ist? Begründen Sie Ihre Aussage.

Weitere Erkenntnisse

In den vorangegangenen Abschnitten haben Sie sicher weitere, noch nicht als Satz formulierte Erkenntnisse über Polynome und ihre Symmetrie-Eigenschaften gewonnen. Insbesondere werden Sie vielleicht eine Vermutung haben, wie man bei einem Polynom, das in ausmultiplizierter Standardform

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

vorliegt, am einfachsten erkennt, ob es symmetrisch ist.

Aufgabe 2.6. Versuchen Sie, die Aussagen der vorigen Abschnitte zu verallgemeinern oder neue Kriterien für die Symmetrie von Polynomen zu finden. Überlegen Sie jeweils, ob Sie in der Lage waren, die Vermutung zu beweisen.

Lösungen

Zusammenfassung

Der Artikel bietet Anregungen zur Lehrplaneinheit 2 (Beweistechniken). Konkret sollen drei wesentliche Fähigkeiten trainiert werden:

1. Das Anstellen einer Vermutung hinsichtlich Korrektheit einer Aussage und darauf aufbauend das Formulieren eigener Vermutungen.
2. Die Präzisierung oder Nachbesserung einer derartigen Vermutung, insbesondere mittels eines Beweisversuches.
3. Der mathematisch korrekte Nachweis einer allgemeinen Behauptung oder deren Widerlegung durch ein Gegenbeispiel.

Es geht nicht darum, mehrere Standard-Beweistechniken kennen zu lernen und schon gar nicht um möglichst kreatives Beweisen. Der Nachweis der Behauptungen geschieht vielmehr im Wesentlichen durch „Nachrechnen“ und wird primär als Handwerkszeug benutzt. Aber auch das will gelernt – und geübt! – sein. Kreativität ist dafür bei den ersten beiden Punkten gefordert. Die Symmetrie von Funktionen eignet sich für diese Zwecke gut. Der Nachweis von Symmetrie ist einfach, ziemlich bekannt und leicht verständlich. Trotzdem wird oft das Ausprobieren an einzelnen Stellen fälschlich als Beweis angesehen. Deshalb kann am Beispiel symmetrischer Funktionen gut erläutert werden, wann ein echter Beweis nötig ist und was diesen ausmacht und wann ein einziges Gegenbeispiel genügt. Die ausgewählten Aufgaben können leicht reduziert oder aber ergänzt werden. Die beispielhaft gezeigte Einheit kann also sehr gut auf einen vorgegebenen Zeitrahmen skaliert werden. Die Darreichung geschieht als Lückentext, bei der ich an eine Verwendung als Arbeitsblatt denke. Auch andere Verwendungen, etwa als Grundlage für eine GFS, sind möglich.

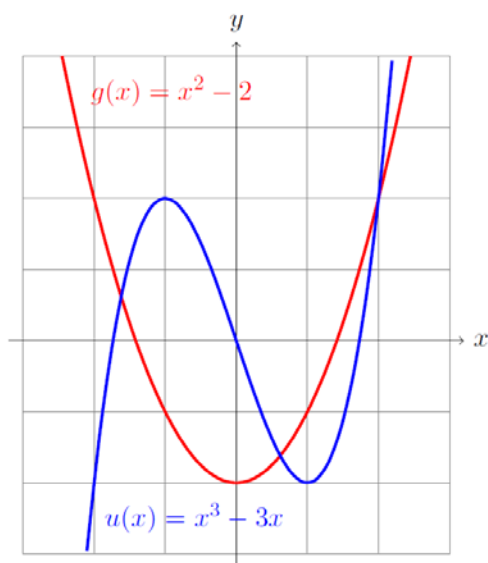
Symmetrische Funktionen

Der Einfachheit halber werden nur überall definierte Funktionen betrachtet.

Definition 1.1. Eine derartige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ...

- ... gerade wenn $f(-x) = f(x)$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$.
- ... ungerade wenn $f(-x) = -f(x)$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild zeigt (in rot) eine gerade Funktion g und (in blau) eine ungerade Funktion u . Die Graphen gerader Funktionen $y = f(x)$ sind symmetrisch zur y -Achse. Die Graphen ungerader Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.



Dass g tatsächlich gerade und u ungerade ist, kann bewiesen werden.

Beweis. Es ist nämlich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$g(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = g(x)$$

$$u(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -u(x)$$

Natürlich reicht es nicht aus, die jeweilige Bedingung ($f(-x) = f(x)$ bei geraden bzw. $f(-x) = -f(x)$ bei ungeraden Funktionen) an einer einzelnen Stelle zu prüfen. Die Bedingung muss an allen Stellen gelten. Das kann für allgemeine Funktionen niemals durch einzelne Überprüfungen – und seien es noch so viele – sicher gestellt werden.

Symmetrische Polynome

Bei speziellen Funktionen kann aber die Überprüfung der Bedingung an endlich vielen Stellen ausreichend sein. Das gilt insbesondere bei Polynomen.

Definition 2.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

wobei $n \in \mathbb{N}$; $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ heißt (reelles) **Polynom**.

Die Zahlen a_i heißen **Koeffizienten** des Polynoms. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der Grad des Polynoms, der höchste von Null verschiedene Koeffizient legt also den **Grad** fest.

Sind alle Koeffizienten Null, so ist f das **Nullpolynom**. Es hat keinen festgelegten Grad. (Alternativ kann man den Grad des Nullpolynoms als -1 definieren.)

Polynome vom Grad 2

Ein Polynom f vom Grad 2 hat stets die Form $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit $a_2 \neq 0$. Für $a_2 = 0$ ist der Grad kleiner als 2.

Satz 2.1. Ein Polynom f vom Grad ≤ 2 mit $f(-x_1) = f(x_1)$ an einer einzigen Stelle $x_1 \neq 0$ muss gerade sein.

Beweis. Die Berechnung

$$\begin{aligned} 0 &= f(-x_1) - f(x_1) = \\ &= [a_2(-x_1)^2 + a_1(-x_1) + a_0] - [a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0] = \\ &= [a_2 x_1^2 - a_1 x_1 + a_0] - [a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0] = -2a_1 x_1 \end{aligned}$$

führt zu $a_1 x_1 = 0$. Wegen $x_1 \neq 0$ muss also $a_1 = 0$ sein. Das Polynom lautet folglich $f(x) = a_2 x^2 + a_0$. Diese Funktion ist aber gerade. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$f(-x) = a_2(-x)^2 + a_0 = a_2 x^2 + a_0 = f(x)$$

Aufgabe 2.1. Muss ein Polynom f vom Grad ≤ 2 mit $f(-x_1) = -f(x_1)$

an einer einzigen Stelle $x_1 \neq 0$ ungerade sein? Versuchen Sie den Beweis des vorangegangenen Satzes zu übertragen. Was vermuten Sie? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Analog zur vorigen Berechnung führt

$$\begin{aligned} 0 &= f(-x_1) + f(x_1) \\ &= [a_2(-x_1)^2 + a_1(-x_1) + a_0] + [a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0] \\ &= [a_2x_1^2 - a_1x_1 + a_0] + [a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0] \\ &= 2 \cdot (a_2x_1^2 + a_0) \end{aligned}$$

zu

$$a_2x_1^2 + a_0 = 0$$

Im Gegensatz zum vorigen Satz enthält diese Gleichung aber noch zwei unbekannte Parameter. Deshalb kann (natürlich) nicht geschlossen werden, dass a_2 und a_0 beide Null sind.

Beweis.

Beispielsweise erfüllt das Polynom zweiten Grades

$$f(x) = x^2 - 1$$

die Bedingung

$$f(-1) = -f(1)$$

ist aber wegen

$$f(2) = 3 \quad \text{und} \quad f(-2) = 3 \neq -f(2)$$

nicht ungerade.

Um zu zeigen, dass eine allgemeine Regel nicht richtig ist, genügt also die Angabe eines einzigen **Gegenbeispiels**.

Überprüfung an zwei Stellen

Um sicher zu sein, dass ein Polynom vom Grad ≤ 2 ungerade ist, muss die Bedingung $f(-x) = -f(x)$ an zwei „verschiedenen“ Stellen überprüft werden.

Aufgabe 2.2. Das klappt dafür auch noch bei einem Polynom dritten Grades $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Zeigen Sie das. Versuchen Sie dabei, den Begriff „verschiedene“ Stellen zu präzisieren. Vervollständigen Sie dann den entsprechenden mathematischen Satz.

Beweis

Es ist also für eine Stelle x_1

$$\begin{aligned} 0 &= f(-x_1) + f(x_1) \\ &= [a_3(-x_1)^3 + a_2(-x_1)^2 + a_1(-x_1) + a_0] + [a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0] \\ &= [-a_3x_1^3 + a_2x_1^2 - a_1x_1 + a_0] + [a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0] \\ &= 2 \cdot (a_2x_1^2 + a_0) \end{aligned}$$

Es ist demnach

$$a_2x_1^2 + a_0 = 0$$

Für die zweite Stelle x_2 erhält man entsprechend

$$a_2x_2^2 + a_0 = 0$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen, dann ergibt sich

$$0 = [a_2x_1^2 + a_0] - [a_2x_2^2 + a_0] = a_2[x_1^2 - x_2^2]$$

Damit die Stellen x_1 und x_2 „wirklich verschieden“ sind, darf auch nicht $x_1 = -x_2$ gelten. Sonst wären die Bedingungen $f(-x_1) = -f(x_1)$ und $f(-x_2) = -f(x_2)$ nämlich identisch.

Wenn aber $|x_1| \neq |x_2|$, dann ist $x_1^2 - x_2^2 \neq 0$. Deshalb muss $a_2 = 0$ sein.

Eingesetzt in die erste Gleichung $a_2x_1^2 + a_0 = 0$ (oder in die zweite) folgt dann $a_0 = 0$. Das Polynom reduziert sich auf

$$f(x) = a_3x^3 + a_1x$$

Wegen

$$f(-x) = a_3(-x)^3 + a_1(-x) = -a_3x^3 - a_1x = -f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist f ungerade.

Satz 2.2. Ein Polynom f vom Grad ≤ 3 ist ungerade, wenn $f(-x_1) = -f(x_1)$ und $f(-x_2) = -f(x_2)$ an zwei Stellen x_1 und x_2 mit $|x_1| \neq |x_2|$.

Aufgabe 2.3. Welche Schlussfolgerungen sind möglich, wenn $f(-x) = f(x)$ an zwei „verschiedenen“ Stellen gilt? Für welchen Polynom-Grad ist eine Aussage möglich? Formulieren und beweisen Sie den entsprechenden mathematischen Satz.

Satz 2.3.

Ein Polynom f vom Grad ≤ 4 mit $f(-x_1) = f(x_1)$ und $f(-x_2) = f(x_2)$ an zwei Stellen $0 < x_1 < x_2$ ist gerade.

Bei der Bedingung $f(-x) = f(x)$ für gerade Funktionen machen natürlich – wie schon bei Polynomen zweiten Grades – nur von 0 verschiedene Stellen einen Sinn.

Beweis

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Für eine Stelle x_1 ist

$$\begin{aligned} 0 &= f(-x_1) - f(x_1) \\ &= [a_4(-x_1)^4 + a_3(-x_1)^3 + a_2(-x_1)^2 + a_1(-x_1) + a_0] \\ &\quad - [a_4x_1^4 + a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0] \\ &= [a_4x_1^4 - a_3x_1^3 + a_2x_1^2 - a_1x_1 + a_0] - [a_4x_1^4 + a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0] \\ &= -2 \cdot (a_3x_1^3 + a_1x_1) \\ &= -2x_1 \cdot (a_3x_1^2 + a_1) \end{aligned}$$

Wegen $x_1 \neq 0$ ist demnach

$$a_3x_1^2 + a_1 = 0$$

Für die zweite Stelle x_2 erhält man entsprechend

$$a_3x_2^2 + a_1 = 0$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen, dann ergibt sich

$$0 = [a_3x_1^2 + a_1] - [a_3x_2^2 + a_1] = a_3[x_1^2 - x_2^2]$$

Wegen $0 < x_1 < x_2$ ist $x_1^2 - x_2^2 \neq 0$. Deshalb muss $a_3 = 0$ sein. Eingesetzt in die erste Gleichung $a_3x_1^2 + a_1 = 0$ (oder in die zweite) folgt dann $a_1 = 0$.

Das Polynom reduziert sich auf

$$f(x) = a_4x^4 + a_2x^2$$

Wegen

$$f(-x) = a_4(-x)^4 + a_2(-x)^2 = a_4x^4 + a_2x^2 = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist f gerade.

Rationale Polynome

Bei jedem Polynom reicht die Überprüfung der Symmetrie-Bedingung an endlich vielen Stellen aus. Je höher aber der Grad des Polynoms ist, desto mehr Stellen werden benötigt.

Ein rationales Polynom, also ein Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

bei dem alle Koeffizienten a_i ($0 \leq i \leq n$) rational sind, scheint hierbei zunächst keine Sonderrolle zu spielen. Seit Mitte des 19-ten Jahrhunderts weiß man aber, dass viele reellen Zahlen nicht als Nullstellen von rationalen Polynomen auftreten können. (Das Nullpolynom muss dabei natürlich ausgenommen werden.) Zu diesen Zahlen, die man **transzendent** nennt, gehören π und e .

Aufgabe 2.4. Eine Zahl, die Nullstelle eines rationalen Polynoms vom Grad $n \geq 1$ sein kann, heißt algebraisch. Zeigen Sie, dass $\sqrt[3]{2}$, $1 + \sqrt{7}$ und alle rationalen Zahlen algebraisch sind.

Beweis

$\sqrt[3]{2}$ ist Nullstelle des rationalen Polynoms

$$x^3 - 2$$

$1 + \sqrt{7}$ ist Nullstelle von

$$(x - 1)^2 - 7$$

Eine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ ist Nullstelle von

$$x - q$$

Aufgabe 2.5. Wie können Sie mit möglichst wenigen Funktionsauswertungen überprüfen, ob ein rationales Polynom f symmetrisch (gerade oder ungerade) ist? Begründen Sie Ihre Aussage.

Es genügt, für eine beliebige transzendente Zahl x_1 (etwa $x_1 = \pi$) $f(x_1)$ und $f(-x_1)$ zu bestimmen.

Ist $f(-x_1) = f(x_1)$, dann ist f gerade.

Ist $f(-x_1) = -f(x_1)$, dann ist f ungerade.

Ansonsten ist das rationale Polynom nicht symmetrisch.

Beweis.

Es ist

$$f(-x_1) = a_0 + a_1(-x_1) + a_2(-x_1)^2 + \dots + a_n(-x_1)^n$$

$$= a_0 - a_1x_1 + a_2x_1^2 - \dots + (-1)^n a_nx_1^n$$

$$f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n$$

$$f(-x_1) + f(x_1) = 2 \cdot [a_0 + a_2x_1^2 + \dots + a_px_1^p]$$

$$f(-x_1) - f(x_1) = -2 \cdot [a_1x_1 + a_3x_1^3 + \dots + a_qx_1^q]$$

wobei p die größte gerade Zahl $\leq n$ und q die größte ungerade Zahl $\leq n$ ist.

Für $f(-x_1) = f(x_1)$ ist

$$a_1x_1 + a_3x_1^3 + \dots + a_qx_1^q = 0$$

Weil x_1 transzendent ist, müssen alle Koeffizienten 0 sein, denn nur das Nullpolynom hat x_1 als Nullstelle.

Damit ist

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + \dots + a_px^p$$

gerade. Entsprechend müssen für $f(-x_1) = -f(x_1)$ wegen

$$a_0 + a_2x_1^2 + \dots + a_px_1^p = 0$$

alle geraden Koeffizienten von f verschwinden.

Dann ist

$$f(x) = a_1x + a_3x^3 + \dots + a_qx^q$$

ungerade. Gilt weder $f(-x_1) = f(x_1)$ noch $f(-x_1) = -f(x_1)$, kann f nicht symmetrisch sein.

Weitere Erkenntnisse

In den vorangegangenen Abschnitten haben Sie sicher weitere, noch nicht als Satz formulierte Erkenntnisse über Polynome und ihre Symmetrie-Eigenschaften gewonnen. Insbesondere werden Sie vielleicht eine Vermutung haben, wie man bei einem Polynom, das in ausmultiplizierter Standardform

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

vorliegt, am einfachsten erkennt, ob es symmetrisch ist.

Aufgabe 2.6. Versuchen Sie, die Aussagen der vorigen Abschnitte zu verallgemeinern oder neue Kriterien für die Symmetrie von Polynomen zu finden. Überlegen Sie jeweils, ob Sie in der Lage waren, die Vermutung zu beweisen.

Interessante Kriterien für die Symmetrie von Polynomen sind etwa:

- Ein Polynom, bei dem alle ungeraden Koeffizienten a_{2k-1} verschwinden, ist gerade.

Das ist leicht direkt nachzuweisen.

- Ein Polynom, bei dem alle geraden Koeffizienten a_{2k} verschwinden, ist ungerade.

Auch das ist einfach zu beweisen.

- Ein Polynom ist sogar genau dann gerade, wenn (in der Standardform) nur gerade Hochzahlen auftreten.

Das ist nicht mehr so leicht zu zeigen.

- Entsprechend ist ein Polynom genau dann ungerade, wenn (in der Standardform) nur ungerade Hochzahlen vorkommen.

Auch das ist nicht so leicht zu beweisen.

- Das Nullpolynom ist die einzige (überall definierte) Funktion, die gerade und ungerade zugleich ist.

Der Nachweis ist einfach.

- Ein Polynom $f(x)$ vom Grad $\leq 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) mit $f(-x) = f(x)$ an k Stellen $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k$ ist gerade.

Das ist eine Verallgemeinerung der uns schon bekannten Fälle $k = 1$ und $k = 2$.

- Ein Polynom $f(x)$ vom Grad $\leq 2k-1$ ($k \in \mathbb{N}$) mit $f(-x) = -f(x)$ an k Stellen $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k$ ist ungerade.

Das ist eine Verallgemeinerung des uns schon bekannten Falles $k = 2$.