

Tafelanschrieb

Beweisführung

Behauptung

$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.

Beweis

Die Beweisführung erfolgt indirekt nach der Methode des Widerspruchsbeweises (indirekter Beweis), das heißt, es wird gezeigt, dass die Annahme, die Wurzel aus 2 sei eine rationale Zahl, zu einem Widerspruch führt (lateinisch: reductio ad absurdum).

Indirekter Beweis:

Wir nehmen an $\sqrt{2}$ ist rational, d.h. lässt sich als Bruch $\frac{p}{q}$ darstellen. Wir nehmen auch an, dass $\frac{p}{q}$ in gekürzter Form vorliegt, so dass p und q teilerfremde ganze Zahlen sind, d.h. sie haben keinen gemeinsamen Teiler.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2q^2.$$

$2q^2$ ist eine gerade Zahl, also ist auch p^2 gerade. Daraus folgt, dass auch die Zahl p gerade ist.

Die Zahl p lässt sich also darstellen durch:

$$p = 2r, \text{ wobei } r \text{ eine ganze Zahl ist.}$$

Damit erhält man mit obiger Gleichung:

$$2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$$

und hieraus nach Division durch 2

$$q^2 = 2r^2.$$

Mit der gleichen Argumentation wie zuvor folgt, dass q^2 und damit auch q eine gerade Zahl ist.

Da p und q durch 2 teilbar sind, erhalten wir einen Widerspruch zur Teilerfremdheit.

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, die Wurzel aus 2 sei eine rationale Zahl, falsch ist und daher das Gegenteil gelten muss. Damit ist die Behauptung, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, bewiesen.

1.

Bemerkung:

$\sqrt{2}$ ist gerade die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats (nach dem Satz von Pythagoras: $1^2 + 1^2 = \text{Diagonale}^2$). Die Irrationalität von $\sqrt{2}$ zeigt, dass das Verhältnis Diagonale/Seitenlänge im Quadrat nicht rational ist, d.h. dass bereits die einfachsten geometrischen Figuren nicht durch "Aneinanderlegen" von Kopien einer "kleinsten Elementarlänge" zu konstruieren sind. Diese Erkenntnis hat vermutlich im fünften vorchristlichen Jahrhundert eine der ersten Grundlagenkrisen der Mathematik ausgelöst.

2.