Der Betrag einer Zahl

Der Betrag (auch Absolutbetrag) einer reellen Zahl gibt ihren Abstand vom Nullpunkt der Zahlengeraden an. Der **Betrag einer reellen Zahl** wird mit Hilfe der Variablen a wie folgt erklärt:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$|4| =$ ________________ , $|-4| =$ ________________ , $\left|-\frac{2}{7}\right| =$ ________________ , $|0| =$ ________________ ,

für $x > 0$: $|x| =$ _____________________ ,für $x < 0$: $|x| =$ ___________________ .

Nach der Definition ist der Betrag einer reellen Zahl stets ____,
da ein Abstand nicht negativ sein kann.

Betragsgleichungen

Eine Gleichung mit einer Lösungsvariablen heißt **Betragsgleichung**, wenn die Lösungsvariable in Betragsstriche eingeschlossen ist.

Beispiele:
(1) $|x| = 4$
(2) $|x - 4| = 18$

Lösen von Betragsgleichungen

Beispiele:
(1) $|x| = 4$

Da nicht bekannt ist, ob $x \geq 0$ oder $x < 0$ ist, ist eine Fallunterscheidung nötig.

1. Fall:

____

____

2. Fall:

____

____

____

____

(2) $|x - 4| = 18$

1. Fall:

____

____

2. Fall:

____

____

Lösung: Der Betrag einer Zahl

Der Betrag (auch Absolutbetrag) einer reellen Zahl gibt ihren Abstand vom Nullpunkt der Zahlengeraden an. Der **Betrag einer reellen Zahl** wird mit Hilfe der Variablen a wie folgt erklärt:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$|4| = 4$, $|-4| =$ - (-4) = 4, $\left|-\frac{2}{7}\right| =$ - (-2/7) = 2/7, $|0| = 0$,

für $x > 0$: $|x| =$ x, für $x < 0$: $|x| =$ -x.

Nach der Definition ist der Betrag einer reellen Zahl stets eine nichtnegative reelle Zahl, da ein Abstand nicht negativ sein kann.

Betragsgleichungen

Eine Gleichung mit einer Lösungsvariablen heißt **Betragsgleichung**, wenn die Lösungsvariable in Betragsstriche eingeschlossen ist.

Beispiele:

(1) $|x| = 4$

(2) $|x - 4| = 18$

Lösen von Betragsgleichungen

Beispiele:

(1) $|x| = 4$

Da nicht bekannt ist, ob $x \geq 0$ oder $x < 0$ ist, ist eine Fallunterscheidung nötig.

1. Fall: Für $x \geq 0$ gilt $|x| = x$. Wir setzen x für $|x|$ in die Gleichung ein.

$$x = 4$$

2. Fall: Für $x < 0$ gilt $|x| = -x$. Wir setzen $-x$ für $|x|$ in die Gleichung ein.

$$-x = 4$$
$$x = -4$$
$$L = \{-4; 4\}$$

(2) $|x - 4| = 18$

1. Fall: $|x - 4| \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 4$

$$|x - 4| = x - 4$$
$$x - 4 = 18$$
$$x = 22$$

2. Fall: $|x - 4| < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 4$

$$|x - 4| = -(x - 4)$$
$$-x + 4 = 18$$
$$-x = 14$$
$$x = -14$$

$$L = \{-14; 22\}$$