Wurzelgleichungen

I. Lösungen und Scheinlösungen

Eine Gleichung, in der die Variable x in einem Wurzelterm steht, heißt Wurzelgleichung, z.B. $\sqrt{x} = x - 2$ oder $\sqrt{x} - \sqrt{x-9} = 1$.

Um die Gleichung nach x auflösen zu können, muss man den Wurzelterm quadrieren, was jedoch keine Äquivalenzumformung ist und deshalb zu Scheinlösungen führen kann. Auch lässt sich eine Gleichung, in der mehrere Wurzelterme auftreten, meist nicht durch einmaliges Quadrieren lösen.

Beispiele:

a) $3 \cdot \sqrt{x-2} = x$

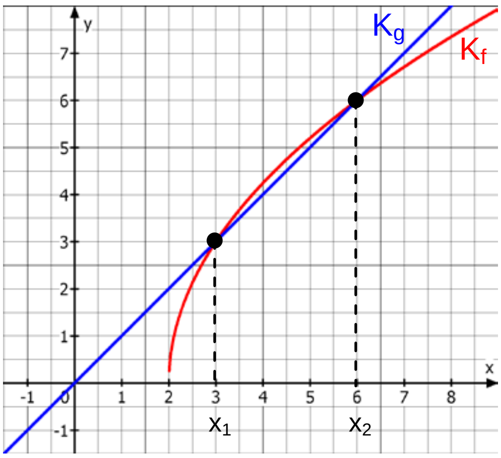
Quadriert man beide Seiten der Gleichung, so ergibt sich

$9 \cdot (x-2) = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9x + 18 = 0$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = 6$.

Dass dies tatsächlich Lösungen der ursprünglichen Wurzelgleichung sind, bestätigt man durch Einsetzen: $3 \cdot \sqrt{3-2} = 3$ bzw. $3 \cdot \sqrt{6-2} = 6$.

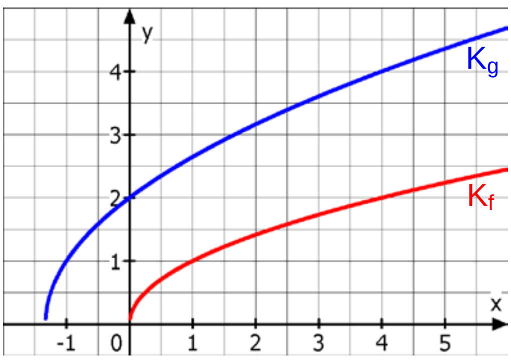
Interpretiert man die ursprüngliche Gleichung als Schnittbedingung der Graphen zweier Funktionen $f: f(x) = 3 \cdot \sqrt{x-2}$ und $g: g(x) = x$, so lassen sich diese beiden Lösungen in nebenstehendem Koordinatensystem veranschaulichen.



b) $\sqrt{x} = \sqrt{4+3x}$

Quadrieren führt auf die lineare Gleichung $x = 4 + 3x$ mit der Lösung $x = -2$.

Dies kann jedoch keine Lösung der ursprünglichen Gleichung sein, da beim Einsetzen sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite der Gleichung unter der Wurzel eine negative Zahl steht. Die Gleichung besitzt somit keine Lösung. Dies zeigt auch die Veranschaulichung mit den Graphen der Funktionen $f: f(x) = \sqrt{x}$ und $g: g(x) = \sqrt{4+3x}$.

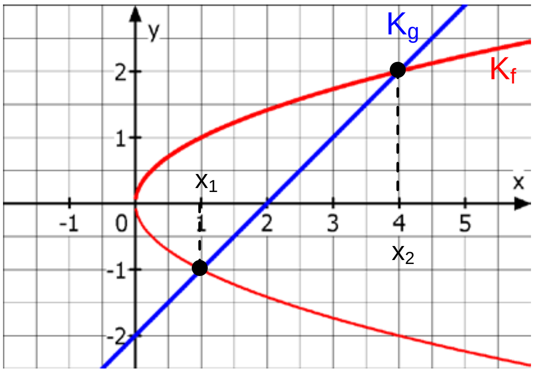


Die Lösung $x = -2$ der linearen Gleichung $x = 4 + 3x$ ist eine Scheinlösung, die durch das Quadrieren der ursprünglichen Gleichung "eingeschleppt" wurde. Dies zeigt sich jedoch erst bei der Probe, d.h. beim Einsetzen in die ursprüngliche Wurzelgleichung.

c) $\sqrt{x} = x - 2$

Quadrieren: $x = (x-2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$. Beide Lösungen lassen sich in die ursprüngliche Wurzelgleichung einsetzen. Bei $x_1 = 1$ ergibt sich jedoch ein Widerspruch: $\sqrt{1} = 1 - 2 = -1$. x_1 ist also wieder eine Scheinlösung, während sich für $x_2 = 4$ eine wahre Aussage ergibt: $\sqrt{4} = 4 - 2 = 2$. Die ursprüngliche Wurzelgleichung hat also nur die Lösung $x = 4$.



In diesem Fall lassen sich sowohl die Lösung $x_2 = 4$ als auch die Scheinlösung $x_1 = 1$ im Koordinatensystem veranschaulichen. $x_1 = 1$ wäre die Lösung der Gleichung $-\sqrt{x} = x - 2$, die beim Quadrieren auf die selbe quadratische Gleichung führt.

Aufgabe:

Löse folgende Gleichungen und veranschauliche die Lösungen mit Hilfe geeigneter Funktionsgraphen.

a) $\sqrt{x+1} = \frac{1}{4}x + 1$ b) $\sqrt{x+2} = -x + 4$ c) $2 \cdot \sqrt{x} = \sqrt{5 - x}$

d) $\sqrt{3 - x} = \frac{1}{2}x$ e) $3 \cdot \sqrt{x+2} = \sqrt{x-6}$ f) $\sqrt{x-5} = 1 - \frac{1}{3}x$

II. Lösen durch Isolieren und Quadrieren

Steht der Wurzelterm nicht alleine auf einer Seite der Gleichung, so muss man diesen zuerst "isolieren", bevor man beide Seiten der Gleichung quadriert.

Beispiele:

a) $\sqrt{x} + 3 = 4x$

Sofortiges Quadrieren würde auf der linken Seite durch das doppelte Produkt der binomischen Formel wieder einen Wurzelterm ergeben. Die Wurzel muss zunächst isoliert werden, d.h. sie muss alleine auf einer Seite der Gleichung stehen.

Isolieren: $\sqrt{x} + 3 = 4x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 4x - 3$

Quadrieren: $x = (4x-3)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 16x^2 - 25x + 9 = 0$

Lösungen der quadratischen Gleichung: $x_1 = \frac{9}{16}$; $x_2 = 1$

Probe: $\sqrt{\frac{9}{16}} + 3 = 4 \cdot \frac{9}{16}$; falsche Aussage, d.h. $x_1 = \frac{9}{16}$ ist keine Lösung.

$\sqrt{1} + 3 = 4 \cdot 1$; wahre Aussage, d.h. $x_2 = 1$ ist eine Lösung.

Die ursprüngliche Wurzelgleichung hat also als einzige Lösung $x = 1$.

b) $\sqrt{x-3}+\sqrt{13-x}=4$

In diesem Fall muss man zweimal quadrieren, um die Wurzeln aufzulösen.

1. Möglichkeit:

Sofort quadrieren:

$\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{13-x}\right)^2=4^2$

$x-3+2\cdot\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{13-x}+13-x=16$

Isolieren: $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{13-x}=3$

Nochmals quadrieren:

$(x-3)(13-x)=9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-16x+48=0$

2. Möglichkeit:

Erst isolieren, dann quadrieren:

Isolieren: $\sqrt{x-3}=4-\sqrt{13-x}$

Quadrieren: $x-3=16-8\cdot\sqrt{13-x}+13-x$

Isolieren: $4\cdot\sqrt{13-x}=-x+16$

Quadrieren: $16\cdot(13-x)=x^2-32x+256$

$\Leftrightarrow \quad x^2-16x+48=0$

Beide Varianten führen auf die selbe quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_1=4$; $x_2=12$.

Probe: $\sqrt{4-3}+\sqrt{13-4}=4$; wahre Aussage, d.h. $x_1=4$ ist Lösung.

$\sqrt{12-3}+\sqrt{13-12}=4$; wahre Aussage, d.h. $x_2=12$ ist Lösung.

Die ursprüngliche Wurzelgleichung hat also die beiden Lösungen $x_1=4$; $x_2=12$.

Aufgabe:

Löse folgende Gleichungen und überprüfe deine Rechnung graphisch mit deinem GTR oder CAS.

a) $\sqrt{x}+2x=10$

b) $\sqrt{x-1}+7=x$

c) $3\cdot\sqrt{x+5}=5-x$

d) $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=7$

e) $2\cdot\sqrt{x+1}-\sqrt{x+6}=1$

f) $\sqrt{2x-3}+2\cdot\sqrt{x+10}=11$