Ungleichungen

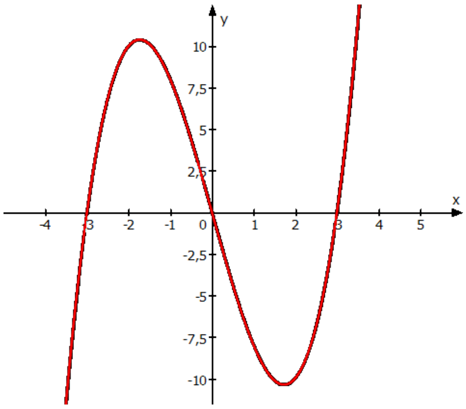
I. Lösen mit Hilfe des Schaubilds

Eine Ungleichung der Form $f(x) < 0$ (oder $f(x) > 0$, $f(x) \le 0$, $f(x) \ge 0$) lässt sich mit Hilfe des Schaubilds K_f der Funktion f lösen, indem man abliest, in welchen x-Bereichen K_f oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse verläuft. Bei einer stetigen Funktion kann ein Vorzeichenwechsel nur an einer Nullstelle erfolgen. Deshalb genügt es die Nullstellen der Funktion zu kennen und zu wissen, ob an der jeweiligen Nullstelle ein Vorzeichenwechsel (VZW) stattfindet oder nicht.

Beispiele:

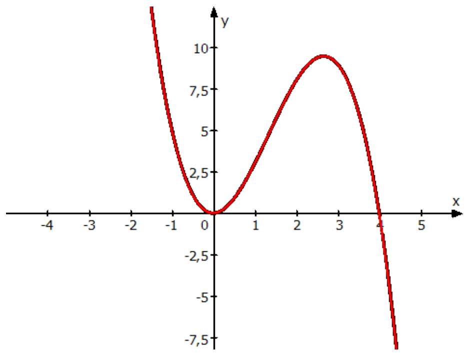
a) $x^3 - 9x < 0$

Die Funktion f mit
$f(x) = x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x+3)$
besitzt drei einfache Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, an denen jeweils ein Vorzeichenwechsel stattfindet. Das Schaubild verläuft von links unten nach rechts oben (Koeffizient vor x^3 ist positiv). Damit lässt sich K_f im Wesentlichen skizzieren und die Lösungsmenge der Ungleichung ablesen:
$L = \{ x \mid x<-3 \} \cup \{ x \mid 0<x<3 \} =]-\infty;-3[\cup]0;3[$



b) $-x^3 + 4x^2 \le 0$

Die Funktion f mit
$f(x) = -x^3 + 4x^2 = -x^2(x - 4)$
besitzt eine einfache Nullstelle (mit VZW) bei $x_1 = 4$ sowie eine doppelte Nullstelle (ohne VZW) bei $x_2 = 0$. Das Schaubild verläuft von links oben nach rechts unten (Koeffizient vor x^3 ist negativ). Damit lässt sich K_f im Wesentlichen skizzieren und die Lösungsmenge der Ungleichung ablesen:
$L = \{ x \mid x\ge 4 \} \cup \{0\} = [4;\infty[\cup \{0\}$



Aufgabe:

Löse folgende Ungleichungen mit Hilfe des Schaubilds.

a) $x^2 - x < 0$	b) $-x^2 + 5x \ge 0$	c) $(x+2)(x-3) > 0$
d) $-x^2 + x + 20 \ge 0$	e) $x^2 + 2x + 2 \le 0$	f) $-x^2 + 6x - 9 < 0$
g) $(x+3)(x+1)(x-4) \le 0$	h) $-(x+5)^2(x+2)(x-1) \ge 0$	i) $(x+4)^2(x+1)(x-2)^2 > 0$
j) $(x+7)^3(x+3)(x-2)^2 \le 0$	k) $-x^3(x+2)^4(x-3)^2 < 0$	l) $2^x - 4 \le 0$
m) $-2\cdot 3^x + 9 > 0$	n) $3^{-x} - 7 < 0$	o) $-3\cdot 5^{-x} - 2 \le 0$

II. Lösen mit Hilfe von Umformungen

Ein elementares Prinzip beim Lösen von *Gleichungen* besteht darin, diese durch Umformungen zu vereinfachen, z.B. indem man beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl (ungleich Null) multipliziert. Mit Hilfe dieser Umformungen lassen sich auch *Ungleichungen* vereinfachen. Man muss hierbei jedoch beachten, dass sich das Ungleichheitszeichen bei einer solchen Umformung evtl. ändert, und ggf. eine Fallunterscheidung durchführen.

1. Aufgabe

Gib bei den folgenden Umformungen der Ungleichung $a < b$ an, ob sich das Ungleichheitszeichen ändert, oder nicht. Mache dazu mehrere Zahlenbeispiele und variiere insbesondere das Vorzeichen der beteiligten Zahlen. Schreibe dein Ergebnis ggf. mit einer Fallunterscheidung auf. Zeichne ggf. das Schaubild der zur entsprechenden Umformung gehörigen Funktion und versuche damit deine Ergebnisse zu erklären.

a) Vertauschen der linken und rechten Seite der Ungleichung

b) Addieren der selben Zahl c auf beiden Seiten der Ungleichung

c) Multiplizieren mit der selben Zahl c auf beiden Seiten der Ungleichung

d) Logarithmieren beider Seiten der Ungleichung

Freiwillig:

e) Kehrwert bilden auf beiden Seiten der Ungleichung

f) Wurzel ziehen auf beiden Seiten der Ungleichung

g) Quadrieren beider Seiten der Ungleichung

2. Aufgabe

Löse folgende Ungleichungen mit Hilfe von Umformungen.

a) $3x - 5 > 1$	b) $7 - 2x \leq 4$	c) $2x + 3 \geq 7x - 12$
d) $x^2 < 16$	e) $3x^2 \geq 75$	f) $(x-3)^2 > 4$
g) $\frac{2x-1}{x-1} > 0$	h) $\frac{2x-3}{x-2} \leq 1$	i) $\frac{1}{x+3} < \frac{2}{x}$
j) $3^x > 12$	k) $5^{x-2} < 8$	l) $10 - 3 \cdot 2^x \geq 1$

III. Lösen mit Hilfe von Vorzeichenbetrachtungen und Aussagenlogik

Steht auf der rechten Seite einer Ungleichung Null, so kann diese gelöst werden, indem man eine Vorzeichenbetrachtung der linken Seite durchführt. Dies ist vor allem dann Erfolg versprechend, wenn auf der linken Seite ein Produkt oder ein Quotient steht.

Beispiele:

a) $(x - 1)\cdot(x + 3) > 0$

Das Produkt zweier Zahlen ist genau dann positiv, wenn beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind, in diesem Fall also, wenn

$(x - 1 > 0 \text{ und } x + 3 > 0)$ oder $(x - 1 < 0 \text{ und } x + 3 < 0)$

$\Leftrightarrow$ $(x > 1 \text{ und } x > -3)$ oder $(x < 1 \text{ und } x < -3)$

$\Leftrightarrow$ $x > 1$ oder $x < -3$

und damit $L = \{ x \mid x > 1 \text{ oder } x < -3 \} = \{ x \mid x > 1 \} \cup \{ x \mid x < -3 \} =]-\infty;-3[\cup]1;\infty[$

b) $\frac{2x-3}{x+1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-3}{x+1} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-3-(x+1)}{x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-4}{x+1} < 0$

Der Quotient zweier Zahlen ist genau dann negativ, wenn eine der Zahlen positiv und die andere negativ ist, in diesem Fall also, wenn

$(x - 4 > 0 \text{ und } x + 1 < 0)$ oder $(x - 4 < 0 \text{ und } x + 1 > 0)$

$\Leftrightarrow$ $(x > 4 \text{ und } x < -1)$ oder $(x < 4 \text{ und } x > -1)$

$\Leftrightarrow$ $x > -1$ und $x < 4$ (da die Aussage in der ersten Klammer immer falsch ist)

und damit $L = \{ x \mid x > -1 \text{ und } x < 4 \} =]-1;4[$

c) Besteht das Produkt aus mehr als zwei Faktoren, so wird diese Methode schnell unübersichtlich:

$x\cdot(x - 2)\cdot(x + 5) > 0$

Das Produkt von drei Zahlen ist genau dann positiv, wenn alle Faktoren positiv sind oder zwei Faktoren negativ und der dritte positiv sind, in diesem Fall also, wenn

$(x > 0 \text{ und } x - 2 > 0 \text{ und } x + 5 > 0)$ oder $(x < 0 \text{ und } x - 2 < 0 \text{ und } x + 5 > 0)$

oder $(x < 0 \text{ und } x - 2 > 0 \text{ und } x + 5 < 0)$ oder $(x > 0 \text{ und } x - 2 < 0 \text{ und } x + 5 < 0)$

Aufgabe:

a) Führe das Beispiel c) zu Ende und löse es auch wie in Abschnitt I. mit Hilfe des Schaubildes. Welche Methode gefällt dir besser?

b) Welche der bisherigen Ungleichungen lassen sich mit der beschriebenen Methode der Vorzeichenbetrachtung lösen (evtl. nach Umformung und Faktorisierung)? Löse sie mithilfe dieser Methode und vergleiche mit der bereits ermittelten Lösungsmenge.

c) Wie viele Fälle sind bei 4 Faktoren zu unterscheiden, wie viele bei 11?