Landesinstitut für Schulentwicklung

Allgemein bildende Schulen

Alle weiterführenden Schularten

Innovativer Bildungsservice

Lernprozesse sichtbar machen

Arbeiten mit Kompetenzrastern und Lernwegelisten

Lernmaterialien Mathematik

Zum Thema
Körperberechnung an Prismen, Zylindern und Pyramiden (Klasse 7-10)

Stuttgart 2016 ▪ NL-53.3 Anlage

Landesinstitut für Schulentwicklung

Qualitätsentwicklung und Evaluation

Schulentwicklung und empirische Bildungsforschung

Bildungspläne

Redaktionelle Bearbeitung

Redaktion	Andreas von Scholz, Landesinstitut für Schulentwicklung Stuttgart

Autoren

AG Kompetenzraster Mathematik
Daniela Ebe
Christine Fürch
Alexander Hermann
Alexandra Hoffmann
Mathias Nimmrichter
Andreas von Scholz
Ewald Seiler

Stand Juli 2016

Impressum

Herausgeber
Landesinstitut für Schulentwicklung (LS)
Heilbronner Straße 172, 70191 Stuttgart
Telefon: 0711 6642-0
Telefax: 0711 6642-1099
E-Mail: poststelle@ls.kv.bwl.de
www.ls-bw.de

Druck und Vertrieb
Landesinstitut für Schulentwicklung (LS)
Heilbronner Straße 172, 70191 Stuttgart
Telefon 0711 6642-1204
www.ls-webshop.de

Beschreibung der Materialien in Mathematik

Die Lernmaterialien Mathematik

Die vorliegenden Lernmaterialien sind der thematischen Einheit „Rund, eckig, spitz – Körperberechnung an Zylindern, Prismen und Pyramiden" zugeordnet. Sie beziehen sich auf eine zum Kompetenzraster erstellte thematische Lernwegeliste, die Teilkompetenzen des Lernfortschritts M5.08 („Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern erstellen") des Kompetenzbereichs „Raum und Form" mit drei Lernfortschritten aus dem Kompetenzbereich „Messen" vereint: M4.10 („Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen."), M4.11 („Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.") und M4.12 („Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen, Pyramiden und Zylindern und daraus zusammengesetzten Körpern bestimmen.").

Thematische Lernwegeliste zur Körperberechnung an Zylindern, Prismen und Pyramiden

Die vorgelegten Lernmaterialien umfassen insgesamt 18 Lernthemen, 22 Lernschritte und ein Lernprojekt. Ergänzt werden sie einen vorgeschlagenen Lernnachweis zu dieser thematischen Einheit (siehe Kapitel „Die Materialien zur Lernprozessdiagnostik"). Für die Bearbeitung einer solchen thematischen Einheit wären – voraussichtlich in Klasse 9 – etwa 6 Wochen mit je 4 Unterrichtsstunden anzusetzen.

In der Randspalte des Deckblattes jedes Lernmaterials findet sich ein Verweis auf die Teilkompetenzen, die im betreffenden Material angesprochen werden. Befinden sich hierunter auch nachgeordnete Teilkompetenzen, so wird diejenige Teilkompetenz, die im Fokus des Materials steht, von den anderen abgesetzt an erster Stelle genannt.

Lernschritte beziehen sich in der Regel jeweils auf eine Teilkompetenz (eine spezifische Fertigkeit oder Fähigkeit) der jeweiligen Lernwegeliste. So gibt es beispielsweise einen Lernschritt zur Berechnung des Zylindervolumens mithilfe der Formel (M4.10.11) oder des Oberflächeninhalts von Prismen (M4.10.02).
Lernschritte sind durch geschlossene Arbeitsaufträge gekennzeichnet. Für alle geschlossenen Arbeitsaufträge im Sinne des konvergenten Denkens gilt, dass eine vollständig definierte Lösung existiert, die grundsätzlich in Form eines Lösungsblattes jeden Lernschritt ergänzt und so zuverlässig die Selbstkontrolle durch die Lernenden ermöglicht.
Lernschritte erlauben somit das gezielte Erlernen, Üben, Wiederholen und Selbstüberprüfen einer Teilkompetenz. Sie sind meist kleinschrittig und eng geführt und durch einen klaren Fachbezug gekennzeichnet. In der Regel handelt es sich um schnell zu bearbeitende, angeleitete und oft auch rein innermathematische Aufgaben.
Eine Glühbirne als Icon weist in der Marginalspalte auf sogenannte *Memos* hin, in denen Wesentliches festgehalten und für die Lernenden als nachschlagbares Grundwissen oder elementare Handlungsanweisung hervorgehoben wird.
Das Taschenrechnersymbol in der Marginalspalte zeigt an, dass die Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der betreffenden Aufgabe den Taschenrechner einsetzen dürfen bzw. sollen.

Im Gegensatz dazu sind die **Lernthemen** bewusst anspruchsvoller und weniger kleinschrittig strukturiert. Sie erfordern in der Regel mehr Bearbeitungszeit als die Lernschritte und haben eine komplexere Aufgabenstellung.
Lernthemen sind Lernmaterialien, die Verknüpfungen zwischen Teilkompetenzen initiieren und fördern. Sie umfassen somit mehrere auf einer Lernwegeliste ausgewiesene Teilkompetenzen, die jeweils auf dem Deckblatt eines jeden Lernmaterials in der rechten Marginalspalte ausgewiesen sind.
Lernthemen sind durch einen deutlichen Themenbezeug gekennzeichnet. Sie verbleiben in der Regel nicht in innermathematischen Aufgabenstellungen, sondern nehmen Bezug zur Umwelt und zum Alltag der Lernenden. Während sich die Lernschritte meist auf der Ebene des Operierens und Benennens bewegen, tritt bei den Lernthemen das Modellieren und Vernetzen in den Vordergrund. Sie beschränken sich somit nicht mehr auf das isolierte Einüben einer Fertigkeit, sondern fordern deren Anwendung im Verbund mit anderen Fertigkeiten. Lernthemen sind somit alltagsorientiert und vernetzend.
Lernthemen beinhalten offene Arbeitsaufträge und fördern divergente Denkprozesse, können also zugleich konvergente und divergente Teilaufgaben einschließen. Daher kann nicht immer eine vollständig definierte Lösung vorgelegt werden. Das Lösungsblatt ist daher auch als Anleitung und Hilfestellung zu verstehen, um eine Selbstkontrolle oder verbesserte Überarbeitung durch die Lernenden zu ermöglichen. Denn Lernthemen sollen den Lernenden die Möglichkeit eröffnen, an den Aufgaben zu wachsen. Tipps und Hinweise in der Marginalspalte können dabei eine Unterstützung sein. Zeigen sich jedoch ernsthaftere Probleme, so können die Lernenden auf Lernschritte ausweichen. Hierzu finden sich – gekennzeichnet durch das Lernschritt-Icon – in der Marginalspalte Verweise auf jeweils passende Lernschritte. Teilweise erscheinen diese Hinweise auch erst in der Marginalspalte des Lösungsblattes. So sind sie für die Lernenden nicht sofort sichtbar und nehmen ihnen nicht von vornherein das eigenständige Denken beim Finden eines Lösungsweges ab.

Lernprojekte dagegen sind gekennzeichnet durch eine freie und problemorientierte Aufgabenstellung. Sie lassen kreative Lösungen zu, ja sie erfordern sie sogar. Somit sind Lernprojekte divergent und es kann ihnen kein Lösungsblatt zur Selbstkontrolle beigegeben werden. Sie zeichnen sich durch eine Produktorientierung aus. Die Vorstellung des erzielten Produkts ersetzt die Selbstkontrolle, die bei Lernschritten und Lernthemen unbedingt dazu gehört.
Bei den Lernprojekten steht der Alltagsbezug ganz im Vordergrund. Sie fordern die Anwendungen verschiedener Kompetenzen und greifen in der Regel auch auf ganz unterschiedliche Kompetenzbereiche zurück. Sie sprengen dabei auch zumeist das begrenzte Denken in Fächern und Fachstrukturen.
Die Lernenden sollten an Lernprojekten in Teams arbeiten und dabei einen kleinen Projektplan erstellen.

Es gibt verschiedene Varianten, wie in den Lernmaterialien die **unterschiedlichen Niveaustufen G, M und E berücksichtigt** werden:

- Es gibt Lernmaterialien, die sich im ganzen nur auf eine bestimmte Niveaustufe beziehen. In solchen Fällen wird dies bereits im Titel des Lernmaterials benannt. Bei den vorliegenden Materialien ist dies bspw. dort der Fall, wo es um die Herleitung der Volumenformel für Pyramiden geht, da die Teilkompetenz „Ich kann eine anschauliche Begründung der

Lernschritt M4.11.07
Volumenformel Pyramide (E)

Volumenformel für Pyramiden formulieren." einzig der Niveaustufe E zugeordnet ist.

- Darüber hinaus gibt es Lernmaterialien, die in verschiedenen Varianten vorliegen. So gibt es bspw. vom Lernthema „M4.10 Backen" eine E-Variante, die sich gegenüber der GM-Variante durch eine komplexere Aufgabenstellung auszeichnet. In der GM-Variante findet sich dagegen eine stärker unterstützende Hilfestellung.

M4.10 Backen (E)
M4.10 Backen (GM)

- Viele Lernmaterialien sollen nicht von vornherein differenzieren. Insbesondere bei den Lernschritten finden sich häufig Aufgaben, die von allen Lernenden bearbeitet werden können und sollen. In manchen Fällen erfolgt hier eine Niveaudifferenzierung über die Performanz, die Art und Weise, wie eine Aufgabe bearbeitet und gelöst wird.

  Bei einzelnen Aufgaben dienen auch die Kästchen-Icons in der Randspalte als Hinweis, wenn eine einzelne (Teil)Aufgabe nicht allen drei Niveaustufen des Bildungsplans zuzuweisen ist. *Ein* gefärbtes Kästchen steht für die Niveaustufe *E*, *zwei* gefärbte Kästchen weisen darauf hin, dass die Aufgabe Niveaustufe G überschreitet und sich auf *M und E* bezieht. Beim Lernschritt „M4.10.02 Oberflächeninhalt von Prismen" überschreitet Aufgabe 2 mit dem sechseckigen Prisma das G-Niveau. Aufgabe 3 richtet sich mit der Ermittlung einer Formel für regelmäßige Prismen explizit an das E-Niveau.

Die Materialien zur Lernprozessdiagnostik Mathematik

In der Regel findets ich am Ende einer Lernwegeliste der Verweis auf eine Selbstüberprüfung und einen möglichen Lernnachweis.

Die **Selbstüberprüfung** dient dem selbständigen und selbstverantwortlichen Testen des Lernstandes. Lernende können gezielt überprüfen, ob sie die Fähigkeiten und Fertigkeiten erworben haben, die zu dem betreffenden Lernfortschritt oder einer thematischen Lernwegeliste gehören. Dazu enthält die Selbstüberprüfung Aufgaben zu möglichst allen Teilkompetenzen. Bei jeder Aufgabe findet sich der Hinweis auf die betreffende Teilkompetenz sowie auf den zugehörigen Lernschritt, mit dem bei Bedarf gezielt weitergearbeitet werden kann. Zudem sind die Aufgaben vorwiegend geschlossen und konvergent und ermöglichen so mithilfe des beigefügten Lösungsblatts eine einfache Selbstkontrolle und Selbstdiagnose durch die Lernenden.
Eine Selbstüberprüfung kann zu ganz unterschiedlichen Zeitpunkten durchgeführt werden: Manche Lernende, die von vornherein überzeugt sind, über die im betreffenden Lernfortschritt oder der thematischen Lernwegeliste angesprochene Kompetenz sicher zu verfügen, können die Selbstüberprüfung im Sinne einer Eingangsdiagnostik verwenden und anschließend, wenn der Bedarf dazu besteht, nur gezielt an einzelnen Teilkompetenzen mithilfe ausgewählter Materialien weiter arbeiten. Andere werden sich vielleicht Lernschritt für Lernschritt voran arbeiten, sich dann an einzelne Lernthemen wagen und schließlich mit der Selbstüberprüfung testen, ob sie bereit sind, sich bei der Lehrkraft für einen Lernnachweis anzumelden. Wieder andere Lernende beginnen womöglich gleich mit einem Lernthema oder Lernprojekt und möchten anschließend überprüfen, ob sie auch wirklich über alle Teilkompetenzen verfügen.

Ein **Lernnachweis** kann in ganz unterschiedlicher Form erbracht werden: Lernende können einen Vortrag halten, ein Plakat gestalten, ein Modell erstellen oder eine Hausarbeit verfassen. Die Lernenden weisen damit nach, dass sie die behandelten Kompetenzen erworben haben. Besonders in Mathematik wird hierbei aber auch der Test als Form schriftlicher Überprüfung anhand vorgefertigter Aufgaben eine wichtige Rolle behalten. So sind zu den bearbeiteten Lernwegelisten jeweils Lernnachweise in schriftlicher Form vorgeschlagen. Wie die Selbstüberprüfung deckt ein solcher Lernnachweis am besten alle einzelnen Teilkompetenzen ab – dies geschieht nun jedoch nicht mehr isoliert sondern im Verbund. Die Aufgaben umfassen dabei auch die verschiedenen Anforderungsbereiche. Insbesondere sind sowohl grundlegende, auch innermathematische Basisaufgaben, die die Durchdringungstiefe des Operierens und Benennens ansprechen, enthalten, als auch Anwendungsaufgaben zum Modellieren und Vernetzen. Nur teilweise zielen Aufgaben auch auf das Reflektieren und Problemlösen ab. Dies kann in anderer Form meist angemessener erfolgen als in einem schriftlichen Test.
Zu einer umfangreichen thematischen Lernwegliste – wie im hier vorgelegten Fall – wird ein Lernnachweis in aller Regel nicht sämtliche Teilkompetenzen abdecken. Je nach Setting wird man dies auch variieren. So ist zunächst zu klären, ob bspw. eine schriftliche Prüfung im Klassenverband in 60 Minuten stattfinden soll oder die Lernenden individuell und ohne enge zeitliche Begrenzung arbeiten.
Das zu dem hier vorgeschlagenen Test beigefügte Lösungsblatt ist nur für die Lehrkraft gedacht. Bewusst wurde auf eine summative Bewertung durch ein Zusammenzählen von Verrechnungspunkten am Ende des Lernnachweises verzichtet: Die Lehrenden sollten vielmehr auswerten, welche Aufgaben wie gelöst wurden, um so zu einer differenzierten Bewertung unter Berücksichtigung der einzelnen Teilkompetenzen zu gelangen.

Berücksichtigung der prozessbezogene Kompetenzen sowie der Leitperspektiven

Während der Bezug des jeweiligen Lernmaterials auf einzelne inhaltsbezogene Kompetenzen und Teilkompetenzen auf dem Deckblatt ausgewiesen ist, findet sich kein Hinweis auf die darin angesprochenen prozessbezogenen Kompetenzen. Diese Fülle an Zusatzinformationen würde die Lernenden überfordern. Zudem ist sie für die Lernplanung nicht erheblich, da hier die inhaltsbezogenen Kompetenzen als Grundlage des Kompetenzrasters dienen. Gleichwohl werden gerade auf der Ebene der vorgelegten Lernmaterialien nun auch die verschiedenen **prozessbezogenen Kompetenzen** des Bildungsplans berücksichtigt.
Quer durch alle Aufgaben werden die Kompetenzen **Kommunizieren** und **mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen** angesprochen. So üben die Lernenden die korrekte Verwendung der Fachsprache ein und erlernen die mathematische Darstellung ihrer Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse.
Nicht nur beim Zeichnen von Schrägbildern oder von Grund- und Aufriss setzen die Lernenden Hilfsmittel wie das Geodreieck gezielt ein und verwenden unterschiedliche Darstellungen. Auch die Nutzung des Taschenrechners und der mathematischen Formelsprache gehören zum Kompetenzbereich *Umgang mit Elementen der Mathematik*.

Das **Modellieren** findet sich in zahlreichen Aufgaben – mehr oder weniger in allen Lernthemen. Die Lernenden müssen hier zu einer Realsituation aus Text, Tabelle und Grafik wesentliche Informationen entnehmen und die Situation vereinfachen. Sie übertragen dies in ein mathematisches Modell, ermitteln in diesem rechnerisch und meist unter Verwendung des Taschenrechners als Hilfsmittel eine Lösung und übersetzen abschließend ihr Ergebnis wieder zurück in die Realität. Dies beginnt kleinschrittig schon in Lernschritten, wenn bspw. in „M4.10.11 Zylindervolumen" berechnen in den Aufgaben 3 bis 5 die Aufgabenstellung zwar das rein Mathematische (vgl. Aufgabe 1 und 2) überschreitet, ansonsten aber die Begrifflichkeit (Nennung von Höhe und Durchmesser) und die Arbeitsanweisung (Frage nach dem Volumen) direkt an das in den Basisaufgaben und dem Beispiel Eingeführte anschließen. Im Lernthema „M4.10 Kaiser-Wilhelm-Gedächtniskirche" dagegen müssen die Lernenden dann bspw. die benötigten Maße und Informationen aus dem Text und der Grafik entnehmen, die Gebäude modellhaft auf geometrische Körper reduzieren und in diesem Modell Probleme lösen. Sie müssen erkennen, dass sie für den umbauten Raum ein Prismenvolumen berechnen müssen oder für die Fläche der Glasbausteine die Mantelfläche eines Prismas.
Hieran wird bereits exemplarisch deutlich, wie Lernende **Probleme lösen**: Sie entnehmen dem Lernmaterial gezielt Informationen und nutzen diese zur Lösung eines gestellten Problems. Dabei setzen sie gezielt formale Rechenstrategien ein und überprüfen ihre errechneten Lösungen kritisch. Dies geschieht etwa auch im Lernthema „M4.10 Schwimmen", wenn die Lernenden anhand weniger Informationen ermitteln sollen, wie viele Poolnudeln man benötigt, um ein Auto schwimmen zu lassen. Dazu müssen sie nicht nur das Zylindervolumen berechnen können, sie müssen sich zusätzlich in den Sachverhalt (Auftrieb im Wasser) hineindenken und überhaupt erst einmal selbstständig eine Lösungsstrategie entwickeln und auf die Idee kommen, dass hier ein Zylindervolumen berechnet werden muss.
Bei zahlreichen Aufgaben müssen Lernende zur Problemlösung auf mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten aus anderen Zusammenhängen zurückgreifen. So wird in vielen Fällen der Satz des Pythagoras bei der Berechnung einer Höhe oder Seitenhöhe herangezogen.
In einzelnen Lernmaterialien üben die Lernenden gezielt das **Argumentieren und Beweisen**, indem sie angeleitet Beweise nachvollziehen und wiedergeben oder selbst zu Ende führen (so z. B. in „M4.11.07 Volumenformel Pyramide (Zerlegung)" und „Volumenformel Pyramide (Füllen)"). Aber auch in anderen Materialien geht es darum, selbst Formeln zu entdecken (bspw. in Aufgabe 3 der Lernschritte „M4.10.02 Oberflächeninhalt von Prismen" oder „M4.10.04 Volumen von Prismen") oder zu begründen oder allgemein begründet Vermutungen zu äußern und deren Plausibilität anhand von Beispielen zu überprüfen (Berechnen des Füllvolumens und Überprüfen durch Ausfüllen mit Wasser in den Lernschritten zur Volumenbestimmung oder bei der Suche nach der volumenmäßig größten Pyramide („M4.11 Die größte Pyramide")).

Auch die **Leitperspektiven** des Bildungsplans werden hier, auf der Ebene der Lernmaterialien, berücksichtigt. So tragen einzelne Materialien durch die jeweilige Themenwahl im Sinne einer **Bildung für nachhaltige Entwicklung** (BNE) dazu bei, dass die Lernenden befähigt werden, nachhaltig zu denken und zu agieren. Beispielsweise beschäftigen sich die Lernenden im Lernthema „M4.10 Ressourcen schonen" mit der Nutzung von Regenwasser oder dem Abfallvolumen von Tetrapaks.

Hier und an anderer Stelle wird selbstbestimmtes und verantwortungsbewusstes Verbraucherverhalten gefördert (**Verbraucherbildung**, VB). Dabei geht es sowohl darum, Täuschungen zu erkennen (z. B. das ungenutzte Luftvolumen in Verpackungen in „M4.10 Alles Käse!“), als auch selbst begründete Bewertungen vorzunehmen oder selbstständig finanzielle Angelegenheiten zu bewältigen, wenn beispielsweise Kosten kalkuliert werden (z. B. beim Lernthema „M4.11 Kerzengießen“).
Im Sinne der **beruflichen Orientierung** (BO) erleben die Lernenden die Bedeutung der Mathematik im Kontext verschiedener Berufe (z. B. Löschleitung der Feuerwehr („M4.10 Wasser marsch!“) oder Gebäudekosten und Gerüstmiete u. a. bei „M4.12 Gebäudesanierungskosten“ oder „M4.10 Kaiser-Wilhelm-Gedächtniskirche“).

Fach	Thema
Mathematik	**Rund, eckig, spitz – Körperberechnung an Prismen, Zylindern und Pyramiden**

Was du schon können solltest:

Ich kann Größenangaben in andere Einheiten umwandeln und mit Größen rechnen (M4.03).
Ich kann mit Flächenmaßen umgehen (M4.05).
Ich kann Umfang und Flächeninhalt von Dreiecken, Vierecken und Kreisen und daraus zusammengesetzten Figuren bestimmen (M4.09).
Ich kann Volumen und Oberflächeninhalt von Würfeln und Quadern bestimmen und mit Volumenmaßen umgehen (M4.06).
Ich kann Körper fachgerecht benennen und sie anhand ihrer Eigenschaften beschreiben und unterscheiden (M5.04).
Ich kann mit Quadratwurzeln umgehen (M1.08).

Was du hier lernen kannst:			**Lernmaterialien** LernSCHRITTE (LS), LernTHEMEN (LT) und LernPROJEKTE (LP)
Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.			
M5.08 01-02	Ich kann Körpernetze und daraus Körpermodelle (Prismen, Pyramiden, Zylinder (und Kegel (E))) herstellen und den Körper benennen.	GM**E**	Körpermodelle und Körpernetze (LS) Werbeagentur (LP)
M5.08 04	Ich kann anhand von Längenangaben Netze zu Prismen, Pyramiden, Zylindern (und Kegeln (E)) zeichnen.	GM**E**	Schokolade (LT)
M5.08 05	Ich kann verschiedene alternative Körpernetze zu ein und demselben Prisma, derselben Pyramide oder demselben Zylinder erstellen.	GME	Schokolade (LT)
M5.08 06	Ich kann vorgegebene Körper, wie beispielsweise Verpackungen, in Einzelflächen zerlegen und diese beschreiben.	GME	Süßigkeiten – ein Verpackungswunder (LT)
M5.08 07	Ich kann einem Netz von Prisma, Zylinder, Pyramide oder Kegel E den entsprechenden Körper zuordnen.	GME	Körpermodelle und Körpernetze (LS)
M5.08 08	Ich kann vorgegebene Einzelflächen so anordnen, dass sie ein Netz für einen vorgegebenen Körper bilden.	GME	Kopfgeometrie (LT)
M5.08 09	Ich kann bewerten und begründen, ob aus einem vorgegebenen Netz ein entsprechender Körper erstellt werden kann.	GME	Kopfgeometrie (LT)
M5.08 10	Ich kann mithilfe meines räumlichen Vorstellungsvermögens Aufgaben zu Körpern und Körpernetzen im Kopf lösen.	GME	Kopfgeometrie (LT)
M5.08 11	Ich kann Körper in Ansichten erkennen und sie benennen.	GME	Die Kirche von Brenz (LT)
M5.08 12-13	Ich kann Grund- und Aufriss von Prismen, Pyramiden und Zylindern zeichnen.	*	Außenbecken einer Therme (LT)
M5.08 14-16	Ich kann Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern skizzieren und bei vorgegebenen Maßen oder nach Abmessen auf kariertes und unliniertes Papier zeichnen.	GME	Prismen-Schrägbilder (LS) Pyramiden-Schrägbilder (LS) Zylinder-Schrägbilder (LS) (Kegel-Schrägbilder (LS))
M5.08 17	Ich kann zu Gegenständen aus meiner Umwelt Schrägbilder skizzieren.	GME	Süßigkeiten – ein Verpackungswunder (LT)
M5.08 18	Ich kann bewerten, ob in Schrägbildern reale Gegenstände korrekt abgebildet sind.	GME	
M5.08 19	Ich kann Zusammenhänge zwischen den Darstellungsformen (Netzen, Schrägbildern) und Modellen bei Prisma, Zylinder und Pyramide herstellen.	ME	Süßigkeiten – ein Verpackungswunder (LT)

Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.			
M4.10 01	Ich kann aus einem Prismenmodell oder Prismennetz Maße entnehmen und anhand der Teilflächen den Inhalt der Mantelfläche und der Oberfläche des Prismas bestimmen.	GME	Volumenbestimmung (Prismen) (LS) Alles Käse! (LT)
M4.10 02	Ich kann den Oberflächeninhalt von Prismen mit dreieckiger und viereckiger Grundfläche (Parallelogramm, Trapez) berechnen.	GME	Oberflächeninhalt von Prismen (LS) Backen (LT)
M4.10 03	Ich kann den Oberflächeninhalt von Prismen bestimmen.	GME	Kaiser-Wilhelm-Gedächtniskirche (LS)
M4.10 04	Ich kann das Volumen von Prismen mit dreieckiger und viereckiger Grundfläche (Parallelogramm, Trapez) berechnen.	GME	Volumen von Prismen (LS) Backen (LT)
M4.10 05	Ich kann das Volumen eines Prismas bestimmen.	GME	Volumenbestimmung (Prismen) (LS) Plätzchenkerzen (LT)
M4.10 06	Ich kann die Formel für das Volumen eines Prismas nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.	GME	Kerzen gießen (LT)
M4.10 07	Ich kann Volumen und Oberflächeninhalt von Prismen aus meiner Umwelt durch Ausmessen und Berechnen (auch unter Verwendung des Taschenrechners) ermitteln.	GME	Volumenbestimmung (Prismen) (LS)
M4.10 08	Ich kann aus einem Zylindermodell oder Zylindernetz Maße entnehmen und den Inhalt der Mantelfläche und der Oberfläche des Zylinders bestimmen.	GME	Mantelfläche von Zylindern (LS)
M4.10 09	Ich kann den Oberflächeninhalt von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.	GME	Zylinderoberfläche berechnen (LS)
M4.10 10	Ich kann die Formel zur Berechnung des Mantelflächeninhalts eines Zylinders herleiten.	ME	Mantelfläche von Zylindern (LS)
M4.10 11	Ich kann das Volumen von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.	GME	Zylindervolumen berechnen (LS) Wasser marsch! (LT)
M4.10 12	Ich kann das Volumen von Zylindern bestimmen.	GME	Volumenbestimmung (Zylinder / Kegel) (LS)
M4.10 13	Ich kann die Formel für das Volumen eines Zylinders nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.	GME	Ressourcen schonen (LT) Schwimmen (LT)
M4.10 14	Ich kann Volumen und Oberflächeninhalt von zylinderförmigen Gegenständen aus meiner Umwelt durch Ausmessen und Berechnen (auch unter Verwendung des Taschenrechners) ermitteln.	GME	Kerzen gießen (LT)

Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.			
M4.11 01	Ich kann zu einer quadratischen Pyramide das Netz skizzieren, es mit Maßen beschriften und über die Teilflächen den Inhalt der Mantelfläche sowie der gesamten Oberfläche der Pyramide bestimmen.	GME	Oberflächenformel Pyramide (LS)
M4.11 02	Ich kann anhand von Grundkantenlänge und Seitenhöhe den Oberflächeninhalt einer quadratischen Pyramide berechnen.	GME	Pyramidenoberfläche berechnen (LS) Die Pyramiden des Louvre (LT)
M4.11 03	Ich kann die Formel für den Oberflächeninhalt einer quadratischen Pyramide nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.	GME	Fehlende Größen bei Pyramiden (LS)
M4.11 04	Ich kann die Seitenhöhe einer quadratischen Pyramide mit bekannter Grundkantenlänge berechnen, wenn ihre Höhe oder die Länge ihrer Seitenkanten gegeben ist.	GME	Die ägyptischen Pyramiden (LT)
M4.11 05	Ich kann anhand der Grundkantenlänge und der Höhe das Volumen einer quadratischen Pyramide berechnen.	GME	Pyramidenvolumen berechnen (LS) Volumenbestimmung (Pyramide) (LS) Die größte Pyramide (LT)
M4.11 06	Ich kann die Formel für das Volumen einer quadratischen Pyramide nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.	GME	Fehlende Größen bei Pyramiden (LS) Kerzen gießen (LT)
M4.11 07	Ich kann eine anschauliche Begründung der Volumenformel für Pyramiden formulieren.	E	Volumenformel Pyramide (Zerlegung 1 / Zerlegung 2 / Füllen 1 / Füllen 2) (LS)
M4.11 08	Ich kann die Höhe einer quadratischen Pyramide mit bekannter Grundkantenlänge berechnen, wenn ihre Seitenhöhe oder die Länge ihrer Seitenkanten gegeben ist.	GME	Die größte Pyramide (LT)
M4.11 09	Ich kann das Volumen von Pyramiden und Prismen unter Berücksichtigung der Grundfläche und der Höhe vergleichen.	GME	Fehlende Größen bei Pyramiden (LS)
M4.11 10	Ich kann das Volumen von nicht-quadratischen Pyramiden berechnen.	GME	Die Schultüte (LT)
M4.11 11	Ich kann den Oberflächeninhalt von nicht-quadratischen Pyramiden berechnen.	GME	Die Schultüte (LT)
M4.11 12	Ich kann die Formeln für Oberflächeninhalt und Volumen einer Pyramide nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.	GME	Fehlende Größen bei Pyramiden (LS)
Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen, Pyramiden und Zylindern und daraus zusammengesetzten Körpern bestimmen.			
M4.12 03	Ich kann das Volumen von aus Prismen, Zylindern und Pyramiden zusammengesetzten Körpern bestimmen.	GME	Gebäudesanierungskosten (LT)
M4.12 04	Ich kann den Oberflächeninhalt von aus Prismen, Zylindern und Pyramiden zusammengesetzten Körpern bestimmen.	GME	Wunderschöne Bauwerke (LT)
M4.12 05	Ich kann anwendungsbezogene Aufgaben zum Volumen eines Körpers lösen, wenn der Körper aus Prismen, Zylindern und Pyramiden zusammengesetzt ist.	GME	Gebäudesanierungskosten (LT)
M4.12 06	Ich kann anwendungsbezogene Aufgaben zum Oberflächeninhalt eines Körpers lösen, wenn der Körper aus Prismen, Zylindern und Pyramiden zusammengesetzt ist.	GME	Wunderschöne Bauwerke (LT)
Ich kann unter Nutzung des Satzes des Pythagoras Streckenlängen berechnen.			
M5.12 05	Ich kann Streckenlängen wie Höhen oder Seitenhöhen in Körpern mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen.	GME	Fehlende Größen bei Pyramiden (LS) Die Pyramiden des Louvre (LT)
	Vorgeschlagener Lernnachweis		LN Lernnachweis Körperberechnung

Fach	Thema
Mathematik	**Rund, eckig, spitz – Körperberechnung an Prismen, Zylindern und Pyramiden**

Was du schon können solltest:

Ich kann Größenangaben in andere Einheiten umwandeln und mit Größen rechnen (M4.03).
Ich kann mit Flächenmaßen umgehen (M4.05).
Ich kann Umfang und Flächeninhalt von Dreiecken, Vierecken und Kreisen und daraus zusammengesetzten Figuren bestimmen (M4.09).
Ich kann Volumen und Oberflächeninhalt von Würfeln und Quadern bestimmen und mit Volumenmaßen umgehen (M4.06).
Ich kann Körper fachgerecht benennen und sie anhand ihrer Eigenschaften beschreiben und unterscheiden (M5.04).
Ich kann mit Quadratwurzeln umgehen (M1.08).

Was du hier lernen kannst:			**Schulbuchaufgaben**
Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.			
M5.08 01-02	Ich kann Körpernetze und daraus Körpermodelle (Prismen, Pyramiden, Zylinder (und Kegel (E))) herstellen und den Körper benennen.	GM**E**	XQ4 76/6 (Prisma) XQ6 127/3 (Pyramide) XQ5 195/1 (Zylinder) PP5 185/6 (Pyramide) PP3 100/1,2 ML10E 44,45 (Projekt)
M5.08 04	Ich kann anhand von Längenangaben Netze zu Prismen, Pyramiden, Zylindern (und Kegeln (E)) zeichnen.	GM**E**	XQ4 77/9,10 (Prisma) XQ5 194/3 (Zylinder) PP6 133/5 (Zylinder) 135/5 (Pyramide) 137/5-7 (Kegel)
M5.08 05	Ich kann verschiedene alternative Körpernetze zu ein und demselben Prisma, Pyramide und Zylinder erstellen.	GME	XQ6neu 167/3 XQ4 76/4 und 77/8 (Prisma)
M5.08 06	Ich kann vorgegebene Körper wie beispielsweise Verpackungen in Einzel-flächen zerlegen und diese beschreiben.	GME	XQ6neu 166/1,2 MK4 143/3 (Prisma) PP5 176/1 (Prisma, Zylinder) EDM5 201/19 (Pyramide) Maß4 110/1 (Prisma, Pyramide, Zylinder)
M5.08 07	Ich kann einem Netz von Prisma, Zylinder, Pyramide (oder Kegel E) den entsprechenden Körper zuordnen.	GME	XQ4 75/3 (Prisma) XQ6(15) 172 (alle) PP5 176/2 SP4 123
M5.08 08	Ich kann vorgegebene Einzelflächen so anordnen, dass sie ein Netz für einen vorgegebenen Körper bilden.	GME	XQ6neu 167/2
M5.08 09	Ich kann bewerten und begründen, ob aus einem vorgegebenen Netz ein entsprechender Körper erstellt werden kann.	GME	XQ6neu 169/4 (Prisma) XQ5 194/4 (Zylinder) PP3 109/4 (Prisma) PP5 185/3 (Pyramide) SP5 141/2 (Zylinder)
M5.08 10	Ich kann mithilfe meines räumlichen Vorstellungsvermögens Aufgaben zu Körpern und Körpernetzen im Kopf lösen.	GME	XQ6neu 167/3,4 (Prisma) XQ4 83/11 (Prisma) XQ5 194/4 (Zylinder) und 202/8 (Quader) PP4 178/1b-d und 179/7,8 (Zylinder) XQ6 129/25 (Pyramide mit Text, kein Netz)
M5.08 11	Ich kann Körper in Ansichten erkennen und sie benennen.	GME	XQ6neu 173/1 (alle Schrägbilder) PP3 112/3 (Prisma) PP4 179/5 (Zylinder) PP5 180/Station 5 (Pyramide) PP5 185/8 (zus.gesetzte Körper Prisma, Pyramide)
M5.08 12-13	Ich kann Grund- und Aufriss von Prismen, Pyramiden und Zylindern zeichnen.	*	XQ6neu 170, 171

			PP3 111/5,6,8 (zus.gesetzte Körper) PP4 178/1 (Zylinder) PP5 184/1a (Pyramide) PP6 128/3 (Prisma)
M5.08 14-16	Ich kann Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern skizzieren und bei vorgegebenen Maßen oder nach Abmessen auf kariertes und unliniertes Papier zeichnen.	GME	XQ4 79/3 (Prisma) XQ5 192/1,3,4 (Zylinder) XQ6 125/3-6 (Pyramide und Kegel)
M5.08 17	Ich kann zu Gegenständen aus meiner Umwelt Schrägbilder skizzieren.	GME	XQ5 125/8 (Prisma, Pyramide) PP4 174/3a (Zusatzinfo „zeichnen“) MK5 131/6a
M5.08 18	Ich kann bewerten, ob in Schrägbildern reale Gegenstände korrekt abgebildet sind.	GME	*nur Schrägbilder überprüfen:* XQ6neu 173/3 (Prisma, Pyramide)
M5.08 19	Ich kann Zusammenhänge zwischen den Darstellungsformen (Netzen, Schrägbildern) und Modellen bei Prisma, Zylinder und Pyramide herstellen.	ME	*Keine Schulbuchaufgaben mit Modellen möglich*
Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.			
M4.10 01	Ich kann aus einem Prismenmodell oder Prismennetz Maße entnehmen und anhand der Teilflächen den Inhalt der Mantelfläche und der Oberfläche des Prismas bestimmen.	GME	SP4 124/1 und 125/6
M4.10 02	Ich kann den Oberflächeninhalt von Prismen mit dreieckiger und viereckiger Grundfläche (Parallelogramm, Trapez) berechnen.	GME	Maß5 100/3 SP4 124/2,3
M4.10 03	Ich kann den Oberflächeninhalt von Prismen bestimmen.	GME	LS5 157/2 (nur Prismen) ML9E 186/8,12
M4.10 04	Ich kann das Volumen von Prismen mit dreieckiger und viereckiger Grundfläche (Parallelogramm, Trapez) berechnen.	GME	Delta5 156/3 SP4 130/2,3,5
M4.10 05	Ich kann das Volumen eines Prismas bestimmen.	GME	Delta5 158/14 SP4 131/9 LS5 157/2 (nur Prismen) ML9E 186/8,11,12
M4.10 06	Ich kann die Formel für das Volumen eines Prismas nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.	GME	ML9E 185/6 und 186/13b,d
M4.10 07	Ich kann Volumen und Oberflächeninhalt von Prismen aus meiner Umwelt durch Ausmessen und Berechnen (auch unter Verwendung des Taschenrechners) ermitteln.	GME	SP4 131/11,12 ML8 61/6,8
M4.10 08	Ich kann aus einem Zylindermodell oder Zylindernetz Maße entnehmen und den Inhalt der Mantelfläche und der Oberfläche des Zylinders bestimmen.	GME	*Keine Schulbuchaufgaben mit Modellen möglich*
M4.10 09	Ich kann den Oberflächeninhalt von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.	GME	ML9E 144/1 Maß5 100/4,6
M4.10 10	Ich kann die Formel zur Berechnung des Mantelflächeninhalts eines Zylinders herleiten.	ME	XQ5 193/1b SP5 140 Einstieg
M4.10 11	Ich kann das Volumen von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.	GME	ML9E 145/1 Maß5 96/3 SP5 144/1,6
M4.10 12	Ich kann das Volumen von Zylindern durch Messen bestimmen.	GME	–
M4.10 13	Ich kann die Formel für das Volumen eines Zylinders nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.	GME	Delta5 165/1b-e ML9E 145/3 SP5 144/3c-f
M4.10 14	Ich kann Volumen und Oberflächeninhalt von zylinderförmigen Gegenständen aus meiner Umwelt durch Ausmessen und Berechnen (auch unter Verwendung des Taschenrechners) ermitteln.	GME	Delta5 165/4 ML9E 145/2 ML9E 146/7,8 SP5 141/6,7
Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.			

M4.11 01	Ich kann zu einer quadratischen Pyramide das Netz skizzieren, es mit Maßen beschriften und über die Teilflächen den Inhalt der Mantelfläche sowie der gesamten Oberfläche der Pyramide bestimmen.	GME	*Keine Schulbuchaufgaben mit Modellen möglich*
M4.11 02	Ich kann anhand von Grundkantenlänge und Seitenhöhe den Oberflächeninhalt einer quadratischen Pyramide berechnen.	GME	Maß5 101/1,2
M4.11 03	Ich kann die Formel für den Oberflächeninhalt einer quadratischen Pyramide nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.	GME	XQ6 127/6,7 und 132/7a-c SP6 99/4 und 102/2
M4.11 04	Ich kann die Seitenhöhe einer quadratischen Pyramide mit bekannter Grundkantenlänge berechnen, wenn ihre Höhe oder die Länge ihrer Seitenkanten gegeben ist.	GME	Maß5 101/3,4
M4.11 05	Ich kann anhand der Grundkantenlänge und der Höhe das Volumen einer quadratischen Pyramide berechnen.	GME	Maß5 97/1 SP6 102/1a
M4.11 06	Ich kann die Formel für das Volumen einer quadratischen Pyramide nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.	GME	EDM5 200/11 SP6 102/1g,h und 102/4
M4.11 07	Ich kann eine anschauliche Begründung der Volumenformel für Pyramiden formulieren.	E	NW5 205/17 DS5 68/1
M4.11 08	Ich kann die Höhe einer quadratischen Pyramide mit bekannter Grundkantenlänge berechnen, wenn ihre Seitenhöhe oder die Länge ihrer Seitenkanten gegeben ist.	GME	XQ6 132/6a,d,e SP6 99/3a-c
M4.11 09	Ich kann das Volumen von Pyramiden und Prismen unter Berücksichtigung der Grundfläche und der Höhe vergleichen.	GME	_
M4.11 10	Ich kann das Volumen von nicht-quadratischen Pyramiden berechnen.	GME	Maß4 111/3,4f+h
M4.11 11	Ich kann den Oberflächeninhalt von nicht-quadratischen Pyramiden berechnen.	GME	EDM5 193/15,16 SP6 100/9-12
M4.11 12	Ich kann die Formeln für Oberflächeninhalt und Volumen einer Pyramide nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.	GME	XQ6 128/12,13,17 und 129/22,24 NW5 203/7c
Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen, Pyramiden und Zylindern und daraus zusammengesetzten Körpern bestimmen.			
M4.12 03	Ich kann das Volumen von aus Prismen, Zylindern und Pyramiden zusammengesetzten Körpern bestimmen.	GME	DS5 72/2,5 und 73/7 (Zylinder, Pyramide)
M4.12 04	Ich kann den Oberflächeninhalt von aus Prismen, Zylindern und Pyramiden zusammengesetzten Körpern bestimmen.	GME	DS5 72/2,5 und 73/8 (Zylinder, Pyramide) Maß5 105/5 (Pyramide, Würfel) 106/9a-c
M4.12 05	Ich kann anwendungsbezogene Aufgaben zum Volumen eines Körpers lösen, wenn der Körper aus Prismen, Zylindern und Pyramiden zusammengesetzt ist.	GME	NW5 195/10b (Prisma) Maß5 106/11 und 107/3,5b-d,7 und 108/6
M4.12 06	Ich kann anwendungsbezogene Aufgaben zum Oberflächeninhalt eines Körpers lösen, wenn der Körper aus Prismen, Zylindern und Pyramiden zusammengesetzt ist.	GME	Delta5 167/12 und 177/8(1) NW5 198/8,10a (Prisma) Maß5 106/11c,d
Ich kann unter Nutzung des Satzes des Pythagoras Streckenlängen berechnen.			
M5.12 05	Ich kann Streckenlängen wie Höhen oder Seitenhöhen in Körpern mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen.	GME	XQ5 159/4,7 und 160/8-12 XQ6 132/6 (Zylinder) MK5 126/1-3 und 131/6a Maß5 98/4-6

Erklärung der Abkürzungen bei den Verweisen auf Schulbuchaufgaben:

XQ4:	Mathematik 4 XQuadrat Ausgabe A, Oldenbourg-Verlag, 2006.
XQ5:	Mathematik 5 XQuadrat Ausgabe A, Oldenbourg-Verlag, 2007.
XQ6:	Mathematik 6 XQuadrat Ausgabe A, Oldenbourg-Verlag, 2008.
XQ6neu:	Mathematik 6 XQuadrat Baden-Württemberg, Oldenbourg-Verlag, 2015.
PP3:	Pluspunkt 3 Mathematik Baden-Württemberg, Cornelsen-Verlag, 2011.
PP4:	Pluspunkt 4 Mathematik Baden-Württemberg, Cornelsen-Verlag, 2012.
PP5:	Pluspunkt 5 Mathematik Baden-Württemberg, Cornelsen-Verlag, 2013.
PP6:	Pluspunkt 6 Mathematik Baden-Württemberg, Cornelsen-Verlag, 2014.
MK4:	Mathematik Konkret 4 Realschule Baden-Württemberg, Cornelsen-Verlag 2006.
MK5:	Mathematik Konkret 5 Realschule Baden-Württemberg, Cornelsen-Verlag 2007.
Maß4:	Maßstab 4 Mathematik Hauptschule Baden-Württemberg, Schroedel-Verlag, 2006.
Maß5:	Maßstab 5 Mathematik Hauptschule Baden-Württemberg, Schroedel-Verlag, 2007.
EDM5:	Elemente der Mathematik Baden-Württemberg, Schroedel-Verlag, 2007.
DS5:	denkstark 5 Mathematik Baden-Württemberg, Schroedel-Verlag, 2013.
NW5:	Mathematik Neue Wege 5 Arbeitsbuch für Gymnasien Baden-Württemberg, Schroedel-Verlag, 2007.
Delta5:	Delta5, Ausgabe Baden-Württemberg, C. C. Buchner-Verlag, 2008.
SP4:	Schnittpunkt 4, Mathematik, Baden-Württemberg, Klett-Verlag, 2006.
SP5:	Schnittpunkt 5, Mathematik, Baden-Württemberg, Klett-Verlag, 2007.
SP6:	Schnittpunkt 6, Mathematik, Baden-Württemberg, Klett-Verlag, 2007.
ML8:	mathe live 8, Mathematik für die Sekundarstufe I, Klett-Verlag, 2008.
ML9E:	mathe live 9E, Mathematik für die Sekundarstufe I, Klett-Verlag, 2008.
ML10E:	mathe live 10E, Mathematik für die Sekundarstufe I, Klett-Verlag, 2009.
LS5:	Lambacher Schweizer 5, Mathematik für Gymnasien, Klett-Verlag, 2007.

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Körpermodelle und Körpernetze**

Mathematik
M5.08.01

Kompetenz

- **Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.**

Lernschritt

Körpermodelle und Körpernetze

Bezug zu Teilkompetenzen

M5.08.01

Ich kann aus Körpernetzen Körpermodelle (Prismen, Pyramiden, Zylinder) herstellen und den Körper benennen.

M5.08.07

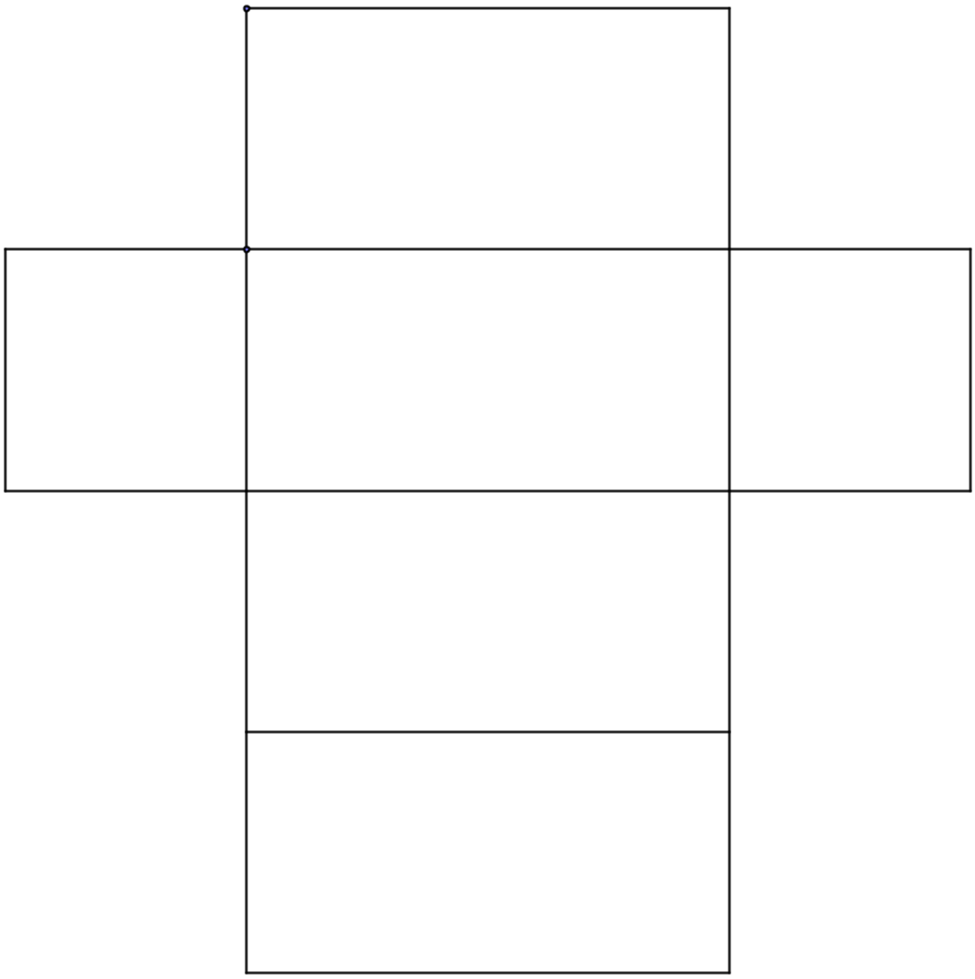
Ich kann einem Netz von Prisma, Zylinder oder Pyramide den entsprechenden Körper zuordnen.

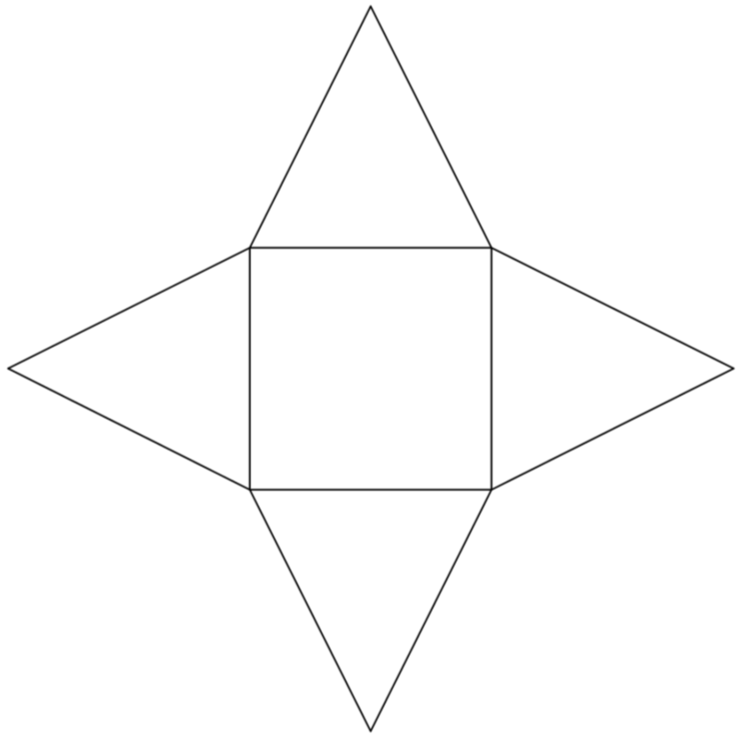
Aufgabe 1

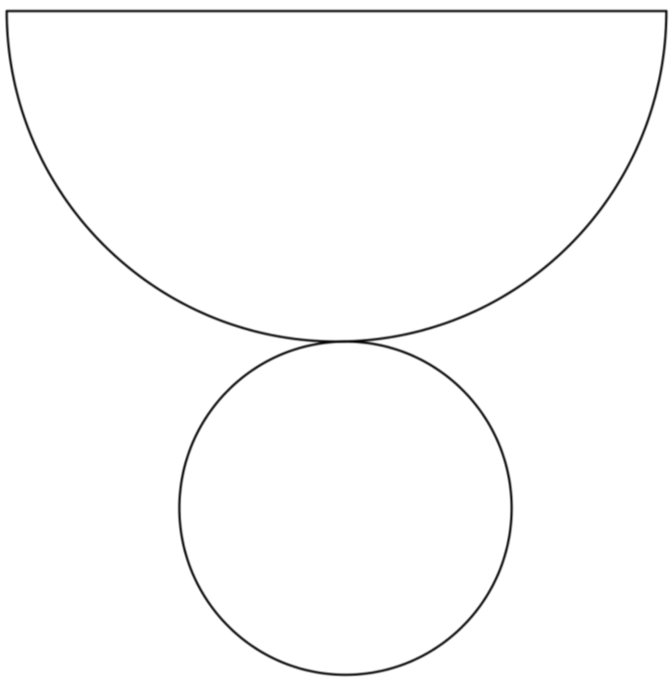
Bastle aus den folgenden Körpernetzen Körpermodelle und benenne die Körper.

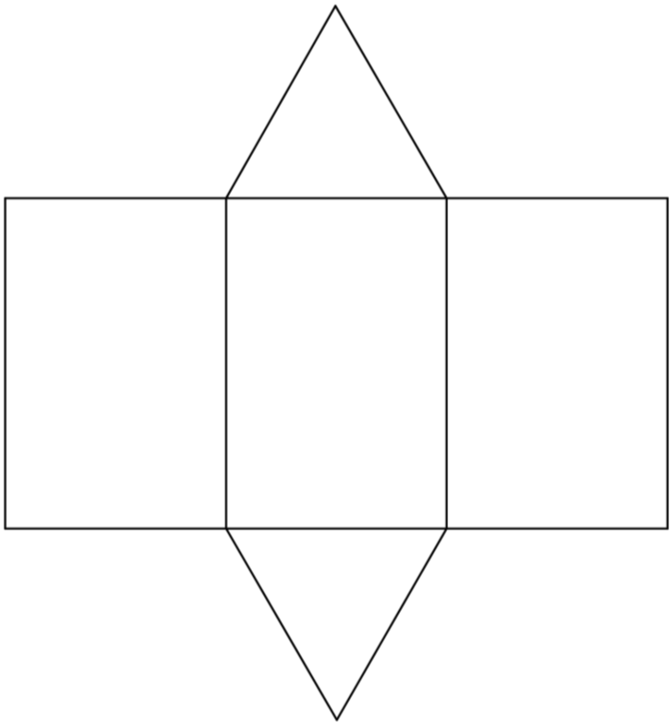
☞ Übertrage jeweils das Netz. Ergänze ggf. Klebelaschen.

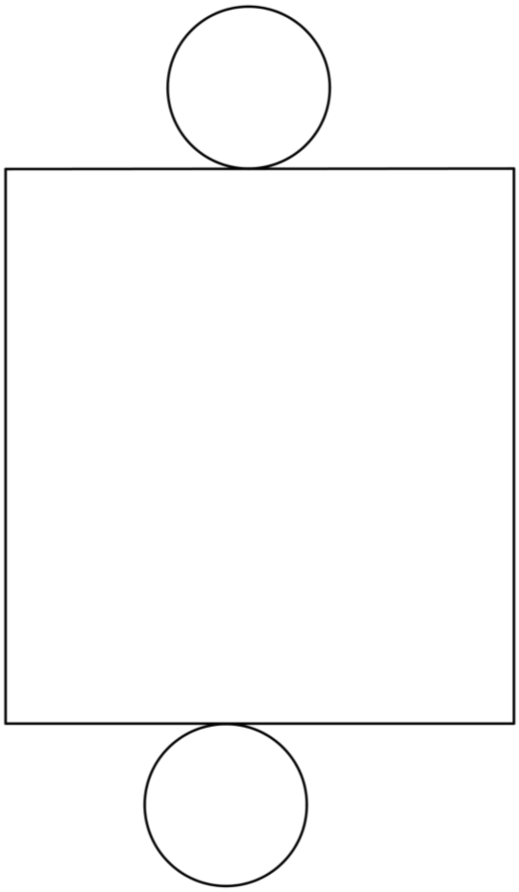
☞ Schneide das Netz aus, falte entlang der Linien und bastle ein Modell.





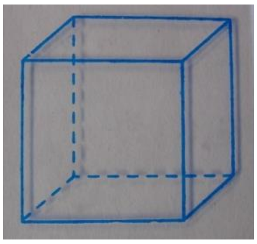
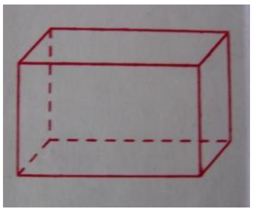
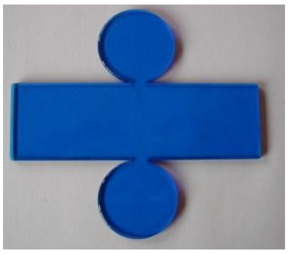
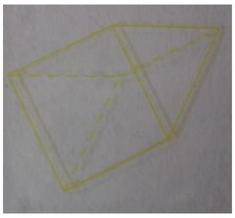
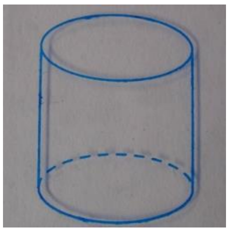
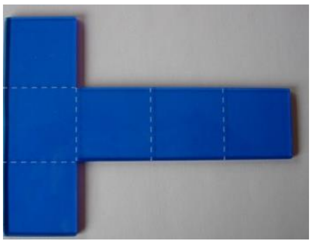
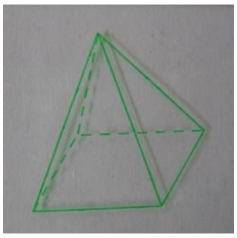
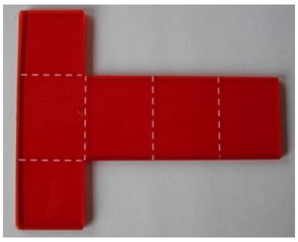
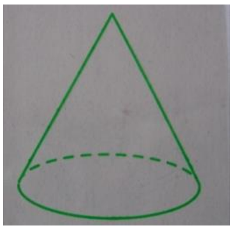
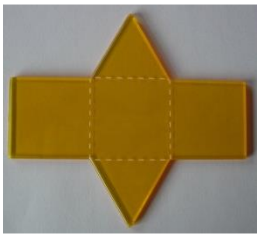






Aufgabe 2

☞ Verbinde jeweils Körper und dazugehöriges Körpernetz.

 1		a 
 2		b 
 3		c 
 4		d 
 5		e 
 6		f 

Autoren:
Ewald Seiler
Andreas von Scholz
Datum: 20.12.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Körpermodelle und Körpernetze**
Kompetenz: - **Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.**		

Mathematik
M5.08.01

Lösung

Aufgabe 1

Quader, quadratische Pyramide, Kegel, Dreiecksprisma, Zylinder

Aufgabe 2

1 – d 2 – e 3 – f 4 – b 5 – a 6 – c

Autoren:
Ewald Seiler
Andreas von Scholz
Datum: 20.12.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Die Kirche von Brenz**

Kompetenz

- **Ich kann Körper in Ansichten erkennen und benennen.**

Mathematik
M5.08.11

Lernthema

Die Kirche von Brenz

Abb.: Sontheim an der Brenz, Ortsteil Brenz, – Kirche St.Gallus
© Franzfoto, April 2011 (Wikimedia, CC BY SA)

Bezug zu Teilkompetenzen

M5.08.11

Ich kann Körper in Ansichten erkennen und benennen.

Aufgabe 1

Du siehst hier die Kirche St. Gallus aus Brenz im Landkreis Heidenheim. Sie ist eine spätromanische Basilika, die um die Wende vom 12. zum 13. Jahrhundert erbaut wurde.
Du kannst an dem Gebäude viele verschiedene geometrische Körper erkennen.

☞ Markiere die unterschiedlichen geometrischen Körper mit verschieden farbigen Buntstiften. (Nimm dabei für jeden Körper eine eigene Farbe).

Abb.: Sontheim an der Brenz – Kirche St.Gallus © Franzfoto, April 2011 (Wikimedia, CC BY SA).

☞ Fülle die Tabelle aus.

Gebäudeteil	Geometrischer Körper	Farbe

Aufgabe 2

Suche drei Bilder von Bauwerken aus, auf denen du jeweils mehrere geometrische Körper erkennen kannst.

☞ Klebe die Bilder auf und benenne die geometrischen Körper zu den einzelnen Gebäudeteilen.

Aufgabe 3

Suche weitere Beispiele für geometrische Körper in deiner Umwelt.

☞ Trage in der Tabelle jeweils Beispiele zu den geometrischen Körpern ein.

Quader	**Würfel**	**Zylinder**	**Kegel**

quadratische Pyramide	**Tetraeder**	**Dreieckprisma**	**Sechseckprisma**

Ein „**Tetraeder**" ist eine regelmäßige Pyramide mit gleichseitiger, dreieckiger Grundfläche. Ihre Oberfläche besteht aus vier identischen gleichseitigen Dreiecken.

Autoren:
Ewald Seiler
Andreas von Scholz
Datum: 20.12.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Die Kirche von Brenz**
Kompetenz: - **Ich kann Körper in Ansichten erkennen und benennen.**		

Mathematik
M5.08.11

Lösung

Aufgabe 1

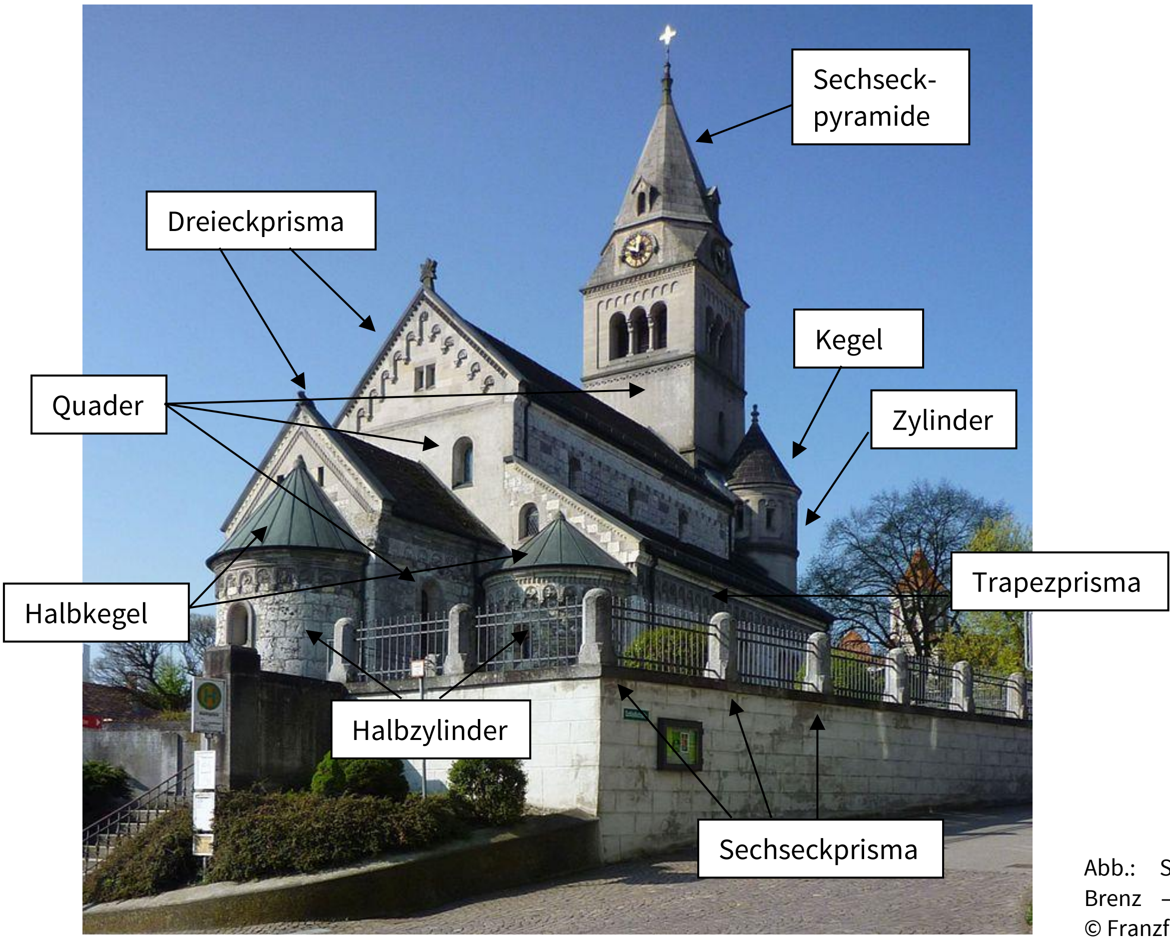


Abb.: Sontheim an der Brenz – Kirche St.Gallus © Franzfoto, April 2011 (Wikimedia, CC BY SA) Bearbeitet durch Hinzufügung der Bezeichnungen für die geometrischen Körper

Aufgabe 2

Individuelle Lösungen

Aufgabe 3

Individuelle Lösungen

Autoren:
Ewald Seiler
Andreas von Scholz
Datum: 20.12.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Prismen-Schrägbilder**

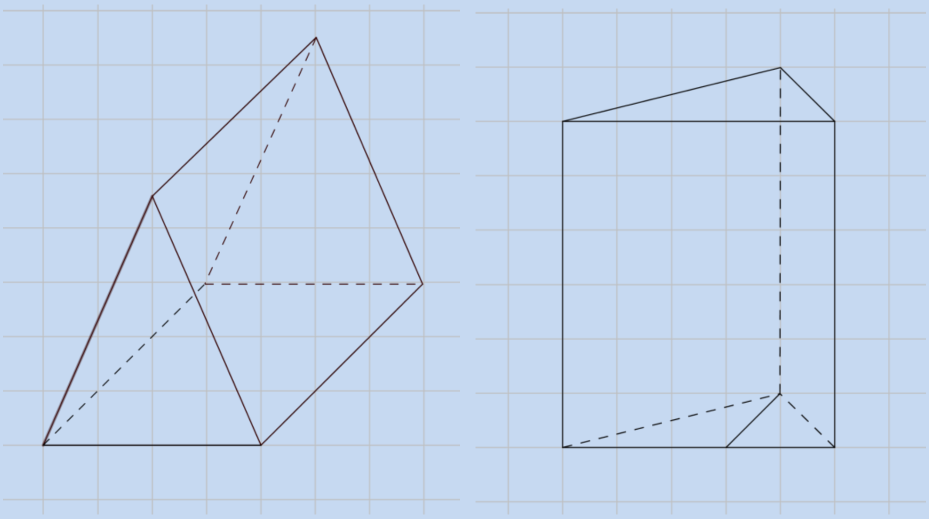
Kompetenz

- **Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.**

Mathematik
M5.08.15

Lernschritt

Prismen-Schrägbilder anfertigen



Bezug zu Teilkompetenzen

M5.08.15

Ich kann Schrägbilder von Prismen zeichnen.

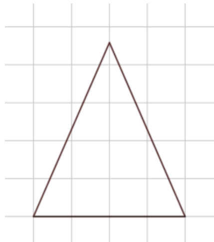
Schrägbilder von auf der Seite liegenden Prismen

Am einfachsten ist es, das Schrägbild eines Prismas so zu zeichnen, dass man auf die Grundfläche als Vorderseite blickt. Das Prisma liegt dann auf einer seiner Seitenflächen.

Dazu gehst du folgendermaßen vor:

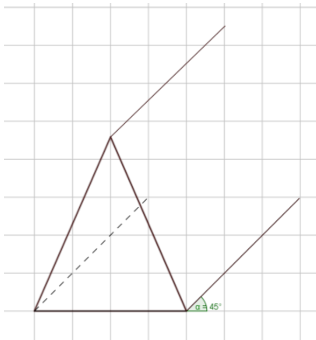
Schritt 1

Zeichne die Grundfläche, auf die man als Vorderseite blickt.
Alle Kanten werden unverzerrt und in Originallänge gezeichnet.



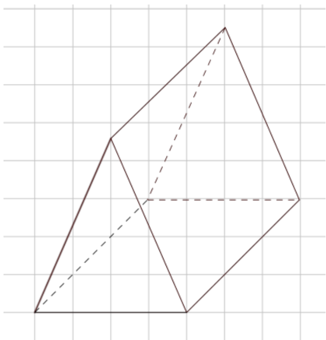
Schritt 2

Zeichne die senkrecht nach hinten verlaufenden Kanten (die Höhen des Prismas) im 45°-Winkel und verkürzt.
Aus 1 Zentimeter wird dabei in der Regel 1 Kästchendiagonale (bzw. 0,7 cm).
Man verkürzt die Höhe also auf das 0,7-Fache.
Verdeckte Kanten werden dabei gestrichelt gezeichnet.



Schritt 3

Verbinde die Enden der nach hinten verlaufenden Kanten.
Du erhältst die Deckfläche. Diese hat dieselben Maße und dieselbe Form wie die Grundfläche.
Verdeckte Kanten werden wieder gestrichelt gezeichnet.

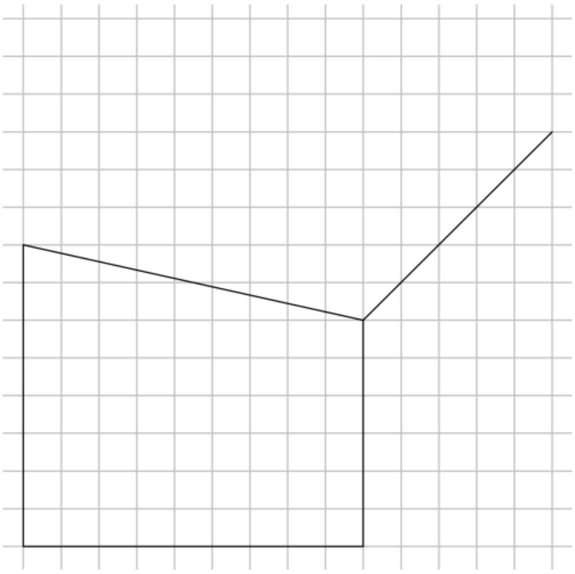


Aufgabe 1

☞ Vervollständige die Abbildungen, so dass jeweils das Schrägbild eines Prismas entsteht.

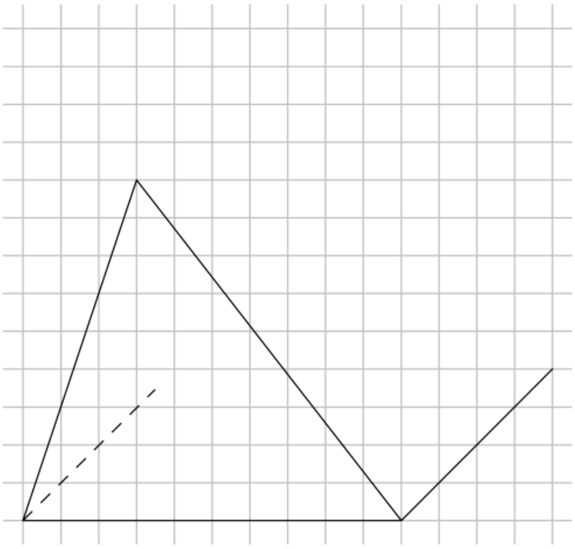
a) ein Trapezprisma

mit 5 cm Höhe



b) ein Dreiecksprisma

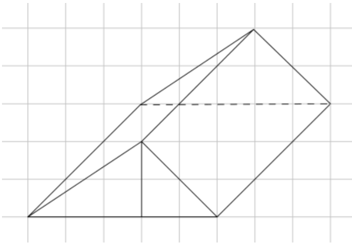
mit 4 cm Höhe



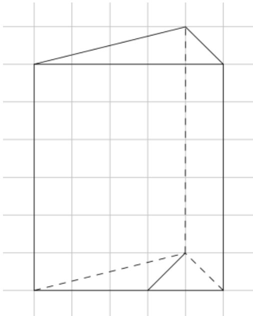
Schrägbilder von auf der Grundseite stehenden Prismen

Ein wenig komplizierter ist es, wenn man ein Prisma so zeichnet, dass die Grundfläche unten ist. Das Prisma steht dann auf der Grundfläche. Man blickt frontal auf eine der Seitenflächen. Die nach hinten verlaufenden Kanten sind nun nicht senkrecht zur Vorderfläche. Daher können sie nicht einfach im 45°-Winkel entlang der Kästchendiagonalen gezeichnet werden.
Stelle dir vor, das Dreiecksprisma mit der Grundfläche mit 5 cm Grundkante und 2 cm Höhe, wird nach hinten gekippt und auf die Grundfläche gestellt:

Grundfläche



Schrägbild 1:
auf der Seite liegend

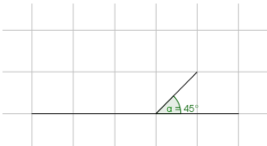


Schrägbild 2:
auf der Grundfläche stehend

Um ein Schrägbild eines auf der Grundseite stehenden Prismas zu zeichnen, gehst du folgendermaßen vor:

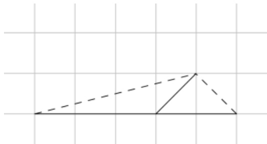
Schritt 1

Überlege, welche Kanten oder Linien der Grundfläche rechte Winkel einschließen. Diese kannst du nun im 45°-Winkel verzerrt darstellen:
Zeichne bei einem Dreieck die Grundseite (unverzerrt).
Zeichne die Höhe des Dreiecks im 45°-Winkel und verkürzt ein.



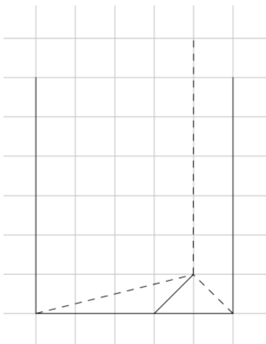
Schritt 2

Verbinde die Enden der Grundseite mit der Höhe.
Du erhältst in verzerrter Form die dreieckige Grundfläche des Prismas.



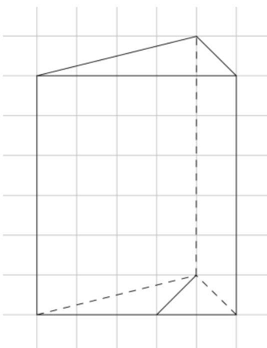
Schritt 3

Zeichne an den Ecken der Grundfläche die Höhe jeweils senkrecht nach oben ein (unverzerrt).



Schritt 4

Verbinde die Enden der Höhen.
Du erhältst die Deckfläche des Prismas.



Aufgabe 2

☞ Zeichne das Prisma einmal auf einer Seitenfläche liegend und einmal auf der Grundfläche stehend.

a) Grundfläche: gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge a = 3 cm,

Höhe: h = 5 cm

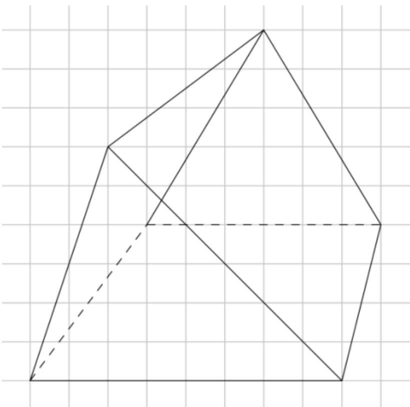
b) Grundfläche: gleichschenkliges Dreieck mit den Kanten a = 3 cm, b = c = 5 cm,

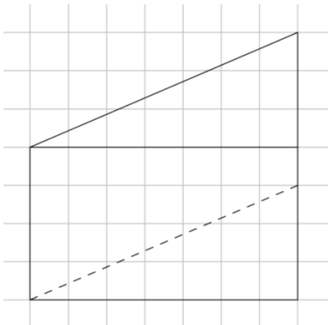
Höhe: h = 4 cm

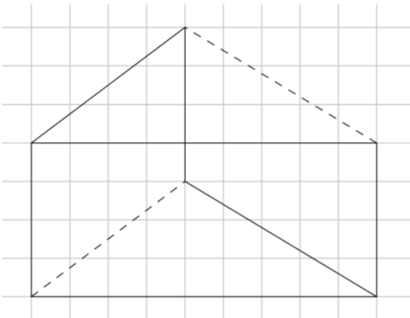
Aufgabe 3

☞ Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen korrekte Darstellungen von Prismen zeigen.

☞ Wenn du einen Fehler findest, erkläre, was falsch gemacht wurde.

a) 

b) 

c) 

Autor:
Andreas von Scholz
Datum: 10.04.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Prismen-Schrägbilder**

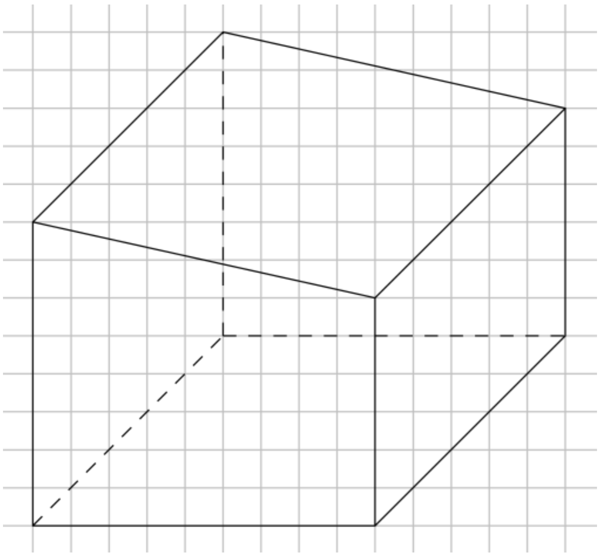
Kompetenz:
- **Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.**

Mathematik
M5.08.15

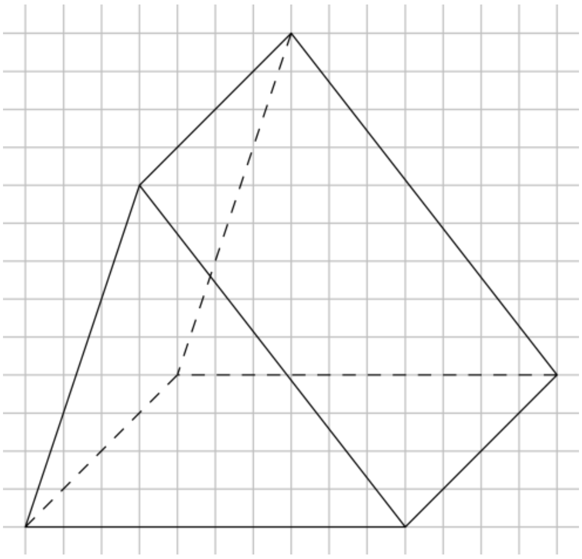
Lösung

Aufgabe 1

a)



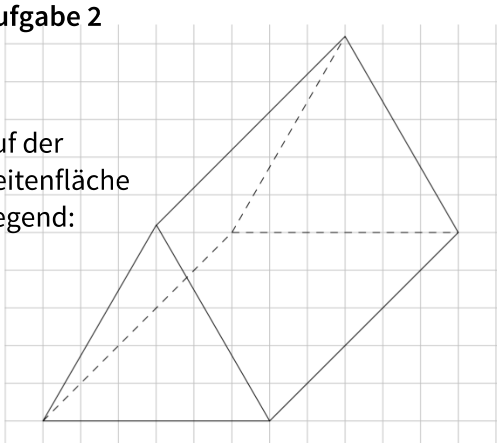
b)



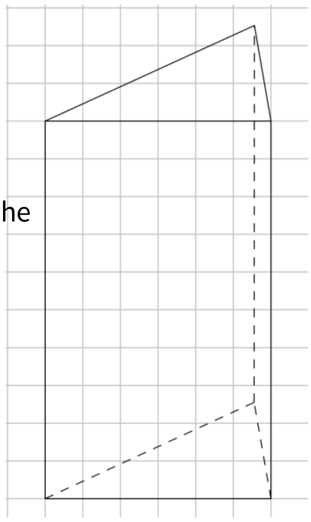
Aufgabe 2

a)

auf der Seitenfläche liegend:

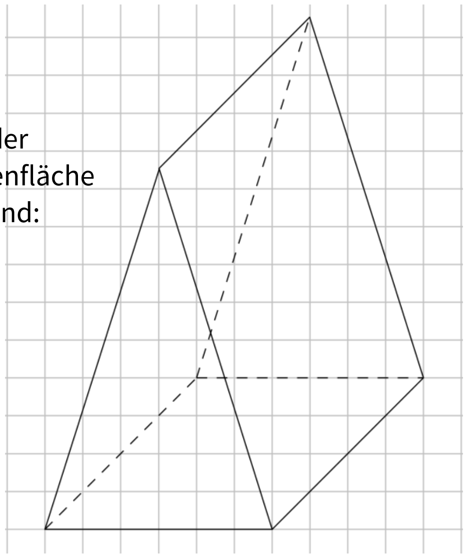


auf der Grundfläche stehend:

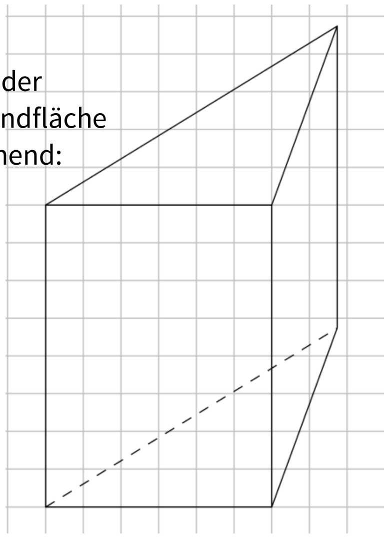


b)

auf der Seitenfläche liegend:



auf der Grundfläche stehend:



Aufgabe 3

a) Die Abbildung zeigt kein Prisma. Die senkrecht nach hinten verlaufenden Höhenkanten müssten alle zueinander parallel und zur vorderen Grundkante im 45°-Winkel eingezeichnet sein.

b) Die Abbildung zeigt ein Prisma, auch wenn es ungewöhnlich aussieht: Die rechte Seitenfläche ist nicht sichtbar, da die Kanten durch die Verzerrung genau aufeinander liegen.

c) Die Abbildung zeigt kein korrektes Prismen-Schrägbild. Die hintere Höhenkante und die rechte Unterkante müssten gestrichelt gezeichnet sein, die rechte Oberkante dagegen müsste durchgezogen sein.

Autor:
Andreas von Scholz
Datum: 10.04.2016

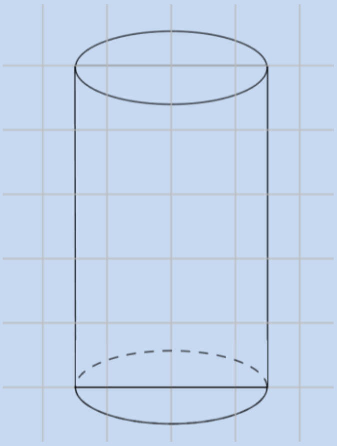
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Zylinder-Schrägbilder**

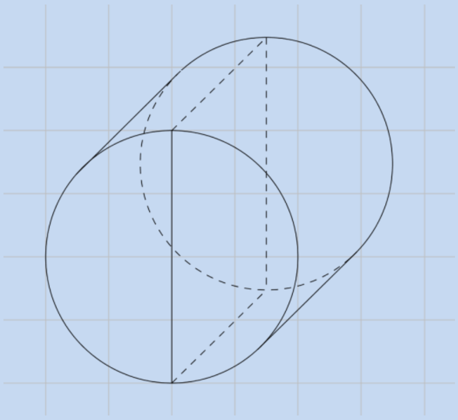
Kompetenz
- **Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.**

Mathematik
M5.08.15

Lernschritt

Zylinder-Schrägbilder anfertigen





Bezug zu Teilkompetenzen

M5.08.15

Ich kann Schrägbilder von Zylindern zeichnen.

Schrägbilder von auf der Grundseite stehenden Zylindern

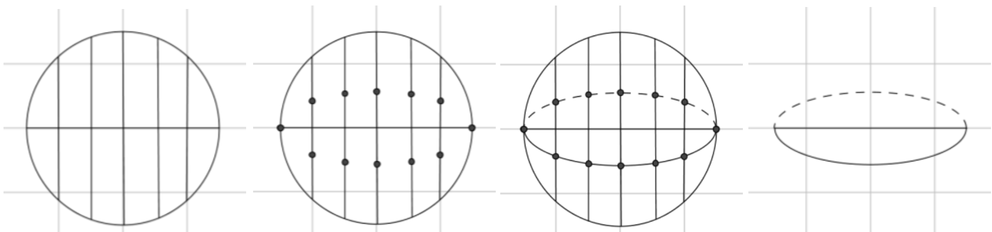
Üblich ist es, das Schrägbild eines Zylinders so zu zeichnen, dass er auf der kreisförmigen Grundfläche steht und man seitlich auf die gewölbte Mantelfläche blickt.
Dazu gehst du folgendermaßen vor:

Schritt 1

Zeichne die Grundfläche, auf der der Zylinder steht.
Dazu muss die Kreisfläche verzerrt dargestellt werden. Sie hat die Form einer „Ellipse“. Um sie zu zeichnen, gehst du so vor:

1. Zeichne den Kreis unverzerrt mit dem Zirkel. Zeichne den Durchmesser ein. Zeichne senkrecht zum Durchmesser Sehnen im Abstand 5 mm.
2. Halbiere diese Sehnen.
3. Verbinde die Sehnen-Mittelpunkte freihändig. Du erhältst eine Ellipse.

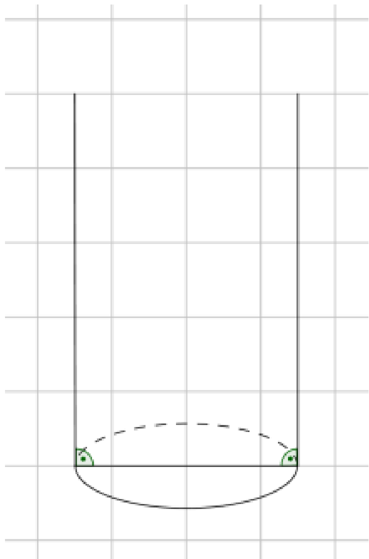
Tipp: Noch besser sieht es aus, wenn Du **von den Sehnen** jeweils nur **ein Drittel** nimmst.



Zeichne eine solche Ellipse samt Durchmesser. Dabei wird die obere Hälfte gestrichelt gezeichnet, da sie nicht sichtbar ist.

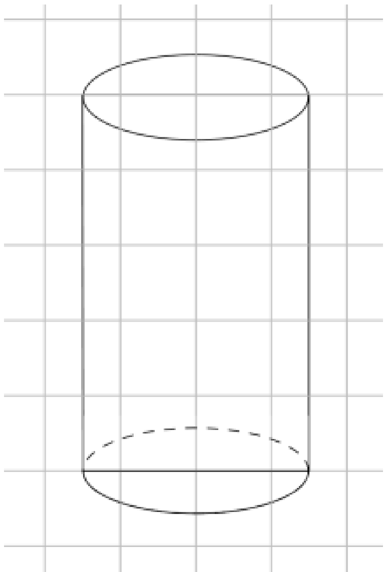
Schritt 2

Zeichne am linken und rechten Ende des Durchmessers jeweils senkrecht die Höhe ein (unverzerrt).



Schritt 3

Verbinde die beiden oberen Enden der Höhen. Die Verbindungslinie ist der Durchmesser der Deckfläche. Ergänze die Ellipsen-förmige Deckfläche. Gehe dabei so vor, wie bei der Grundfläche.



Aufgabe 1

☞ Vervollständige die Abbildungen, so dass jeweils das Schrägbild eines Zylinders entsteht.

a) ein Zylinder mit 4 cm Höhe

b) ein Zylinder mit 5 cm Höhe

Aufgabe 2

Zeichne das Schrägbild einer 10 cm hohen Konservendose mit Durchmesser 7 cm im Maßstab 1 : 2.

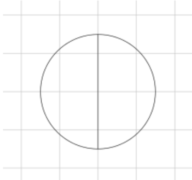
Schrägbilder von auf der Seite liegenden Zylindern

Etwas einfacher ist es, wenn man den Zylinder so zeichnet, dass man auf die kreisförmige Grundfläche als Vorderseite blickt. Der Zylinder liegt dann seitlich auf der gewölbten Mantelfläche.

Um ein Schrägbild eines auf der Seite liegenden Zylinders zu zeichnen, gehst du folgendermaßen vor:

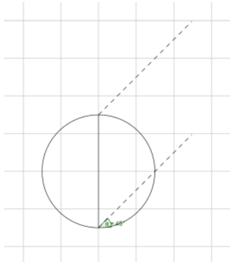
Schritt 1

Zeichne mit dem Zirkel die kreisförmige Grundfläche, auf die du als Vorderseite blickst.
Zeichne einen senkrecht stehenden Durchmesser ein.



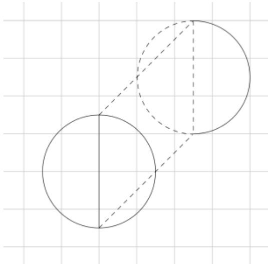
Schritt 2

Zeichne gestrichelt an beiden Enden des Durchmessers im 45°-Winkel verkürzt die Höhe des Zylinders ein.
Wie du das bereits kennst, wird aus 1 Zentimeter dabei in der Regel 1 Kästchendiagonale (bzw. 0,7 cm).
Man verkürzt die Höhe also auf das 0,7-Fache.



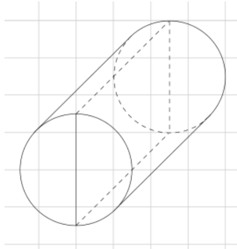
Schritt 3

Verbinde gestrichelt die beiden Enden der Höhen.
Du erhältst den Durchmesser der kreisförmigen Deckfläche.
Zeichne mit dem Zirkel vom Mittelpunkt des Durchmessers aus die kreisförmige Deckfläche.



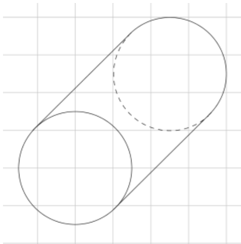
Schritt 4

Zeichne die Konturlinien des Mantels ein.



Schritt 5

Du kannst die Durchmesser und die gestrichelten Höhen ausradieren. Den unsichtbaren Teil der Kreislinie der Deckfläche kannst du ebenfalls ausradieren und gestrichelt einzeichnen.



Aufgabe 3

☞ Zeichne das Schrägbild eines Zylinders mit den folgenden Maßen – einmal auf der Grundfläche stehend und einmal auf der Seitenfläche liegend:

a) d = 3 cm, h = 7 cm

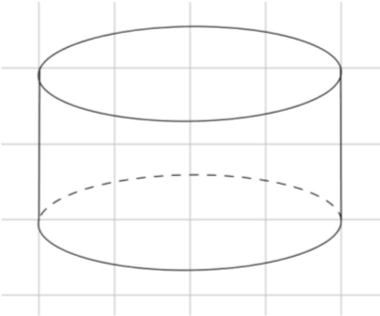
b) r = 2 cm, h = 3 cm

Aufgabe 4

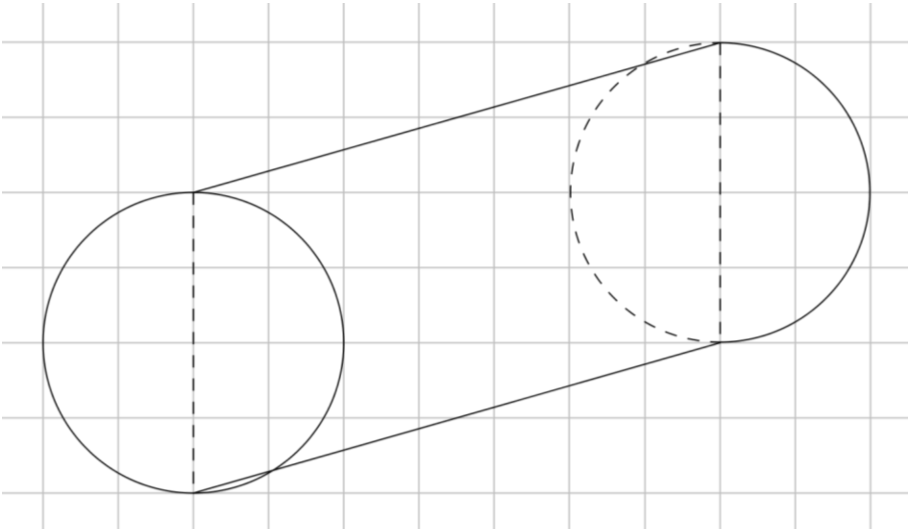
☞ Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen korrekte Darstellungen von Zylindern zeigen.

☞ Wenn du einen Fehler findest, erkläre, was falsch gemacht wurde.

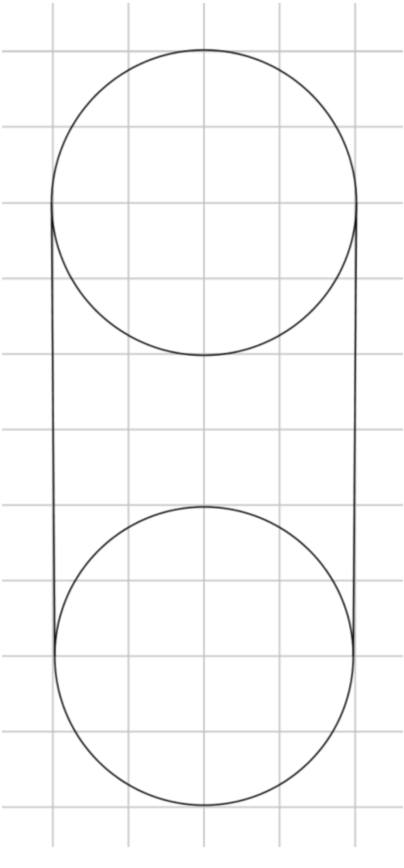
a)



b)



c)



Autor:
Andreas von Scholz
Datum: 10.04.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Zylinder-Schrägbilder**

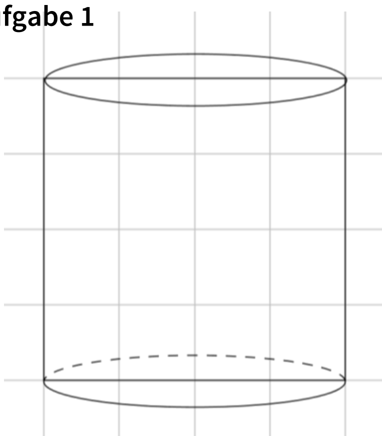
Kompetenz:
- **Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.**

Mathematik
M5.08.15

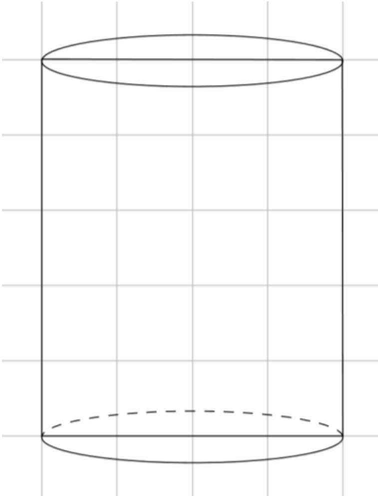
Lösung

Aufgabe 1

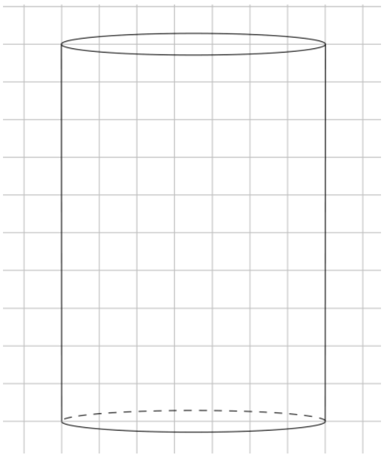
a)



b)



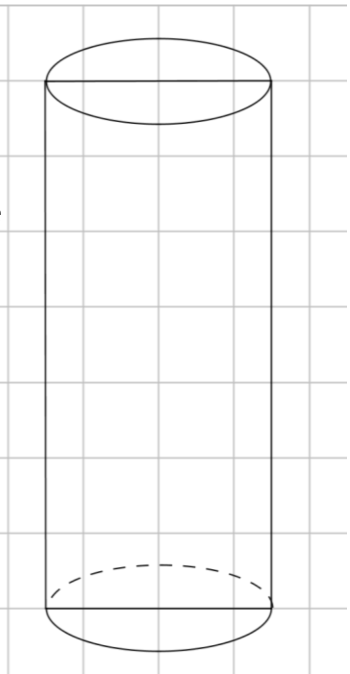
Aufgabe 2



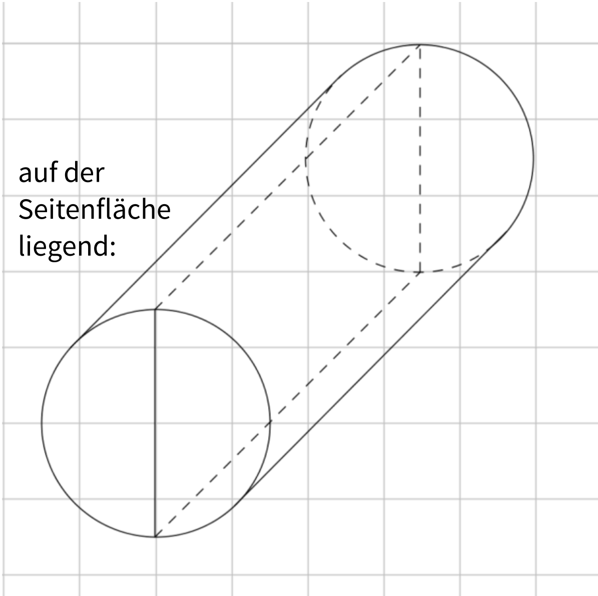
Aufgabe 3

a)

auf der Grundfläche stehend:

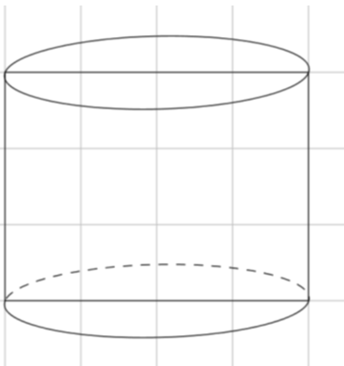


auf der Seitenfläche liegend:

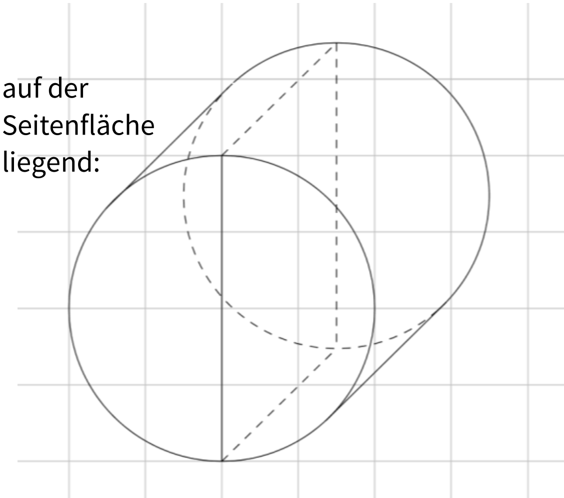


b)

auf der Grundfläche stehend:



auf der Seitenfläche liegend:



Aufgabe 4

a) Die Abbildung zeigt ein korrektes Schrägbild eines Zylinders.

b) Die Abbildung zeigt kein korrektes Zylinder-Schrägbild. Anstelle der Konturlinien des Mantels sind die Enden des senkrechten Durchmessers eingezeichnet.

c) Die Abbildung zeigt kein korrektes Zylinder-Schrägbild. Die Grund- und Deckfläche dürfen nicht als Kreise gezeichnet werden, sondern verzerrt als Ellipse. Außerdem muss der hintere Teil der Grundfläche durch eine gestrichelte Linie begrenzt werden, da diese Kante verdeckt ist.

Autor:
Andreas von Scholz
Datum: 10.04.2016

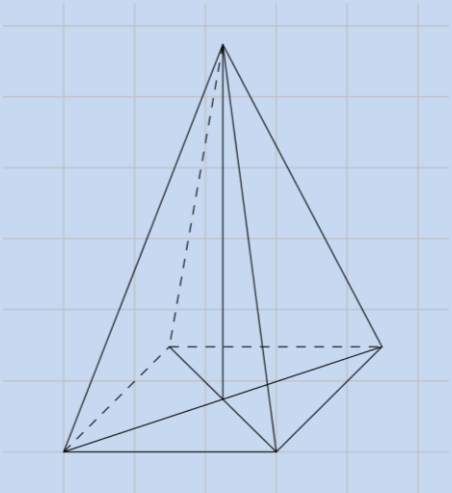
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Pyramiden-Schrägbilder**

Mathematik
M5.08.15

Kompetenz
- **Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.**

Lernschritt

Pyramiden-Schrägbilder anfertigen



Bezug zu Teilkompetenzen

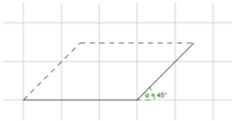
M5.08.15

Ich kann Schrägbilder von Pyramiden zeichnen.

Schrägbilder von Pyramiden mit rechteckiger Grundfläche

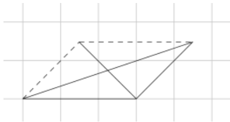
Schritt 1

Zeichne zuerst verzerrt die Grundfläche der Pyramide:
Die vordere Kante wird unverkürzt eingezeichnet, die beiden senkrecht nach hinten verlaufenden Kanten im 45°-Winkel und verkürzt.
Wie du das bereits kennst, wird aus 1 Zentimeter dabei in der Regel 1 Kästchendiagonale (bzw. 0,7 cm).
Man verkürzt die Höhe also auf das 0,7-Fache.
Außerdem werden verdeckte Kanten gestrichelt gezeichnet.



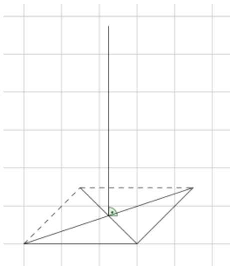
Schritt 2

Zeichne die beiden Diagonalen der Grundfläche ein.



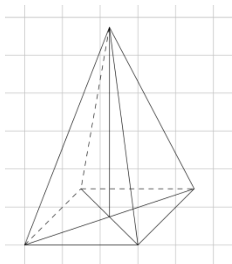
Schritt 3

Zeichne im Schnittpunkt der beiden Diagonalen senkrecht nach oben die Höhe der Pyramide ein (unverkürzt).



Schritt 4

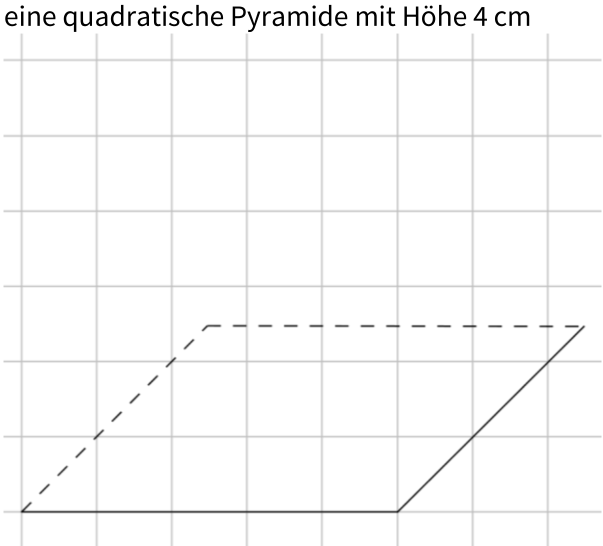
Die Spitze der Pyramide befindet sich im oberen Ende der eingezeichneten Höhe.
Verbinde die Spitze durch vier Seitenkanten mit den Ecken der Grundfläche.
Verdeckte Kanten werden dabei wieder gestrichelt gezeichnet.



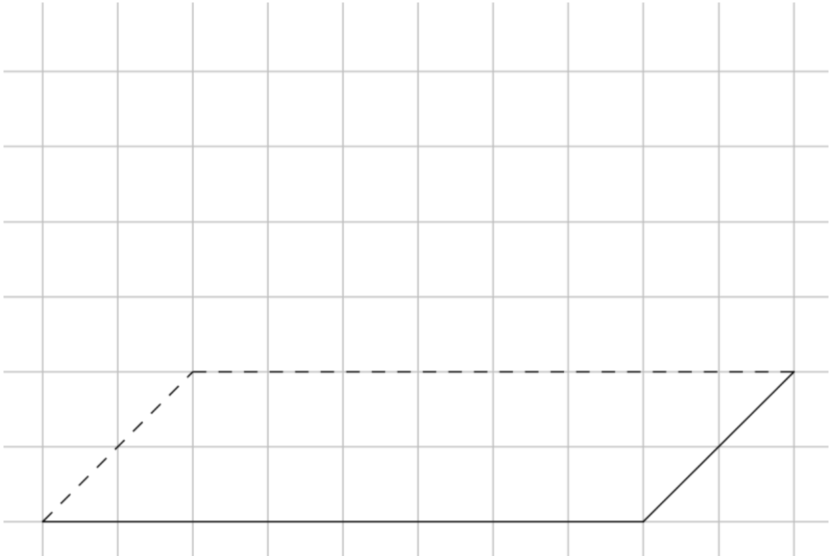
Aufgabe 1

☞ Vervollständige die Abbildungen, so dass jeweils ein Schrägbild einer Pyramide entsteht.

a) eine quadratische Pyramide mit Höhe 4 cm



b) eine rechtwinklige Pyramide mit Höhe 5 cm



Aufgabe 2

☞ Zeichne das Schrägbild einer Pyramide mit folgenden Maßen:

a) a = b = 5 cm, h = 4 cm

b) a = 4 cm, b = 7 cm, h = 5 cm

Aufgabe 3

Auf dem Marktplatz von Karlsruhe steht seit 1825 eine Sandsteinpyramide als Grabmal des Stadtgründers Karl Wilhelm von Baden-Durlach. Sie ist 6 m breit und 6,80 m hoch. Zeichne ein Schrägbild der Pyramide im Maßstab 1 : 100.

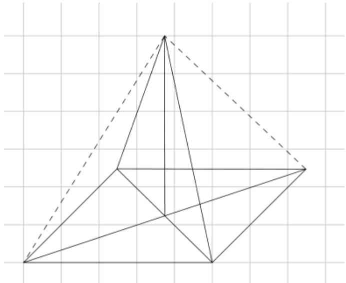
Karlsruhe_Pyramide_Winter_Nacht_01
© Dirk Heldmaier
(wikimedia, 2010, CC BY SA)

Aufgabe 4

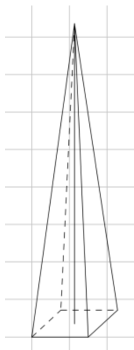
☞ Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen korrekte Darstellungen von Pyramiden sind.

☞ Wenn du einen Fehler findest, erkläre, was falsch gemacht wurde.

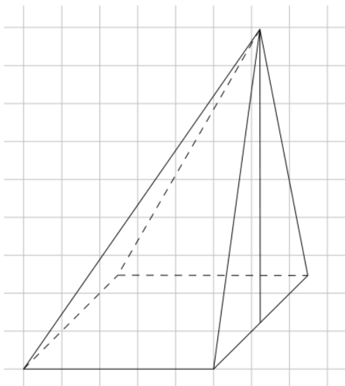
a)



b)



c)



Autor:
Andreas von Scholz
Datum: 10.04.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Pyramiden-Schrägbilder**

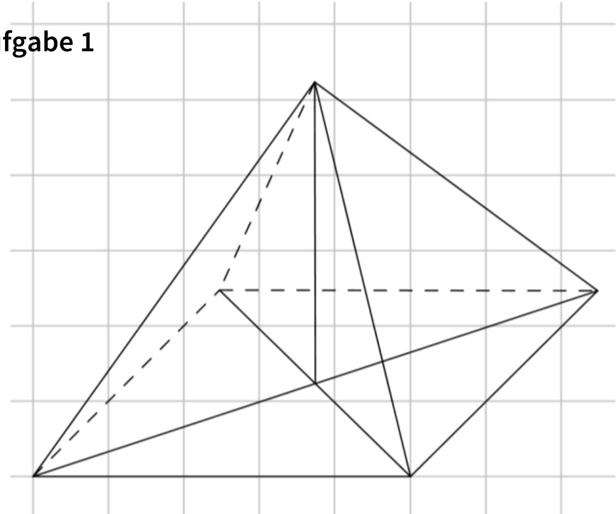
Kompetenz:
- **Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.**

Mathematik
M5.08.15

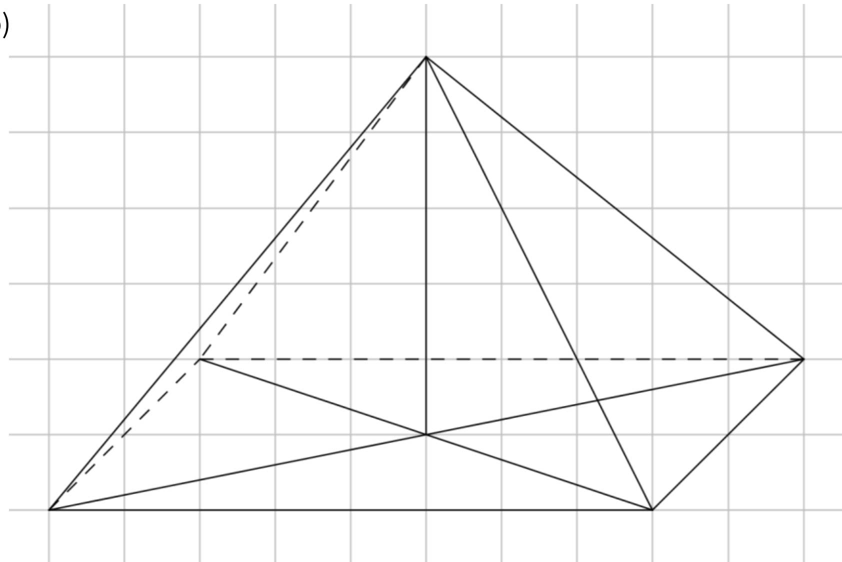
Lösung

Aufgabe 1

a)

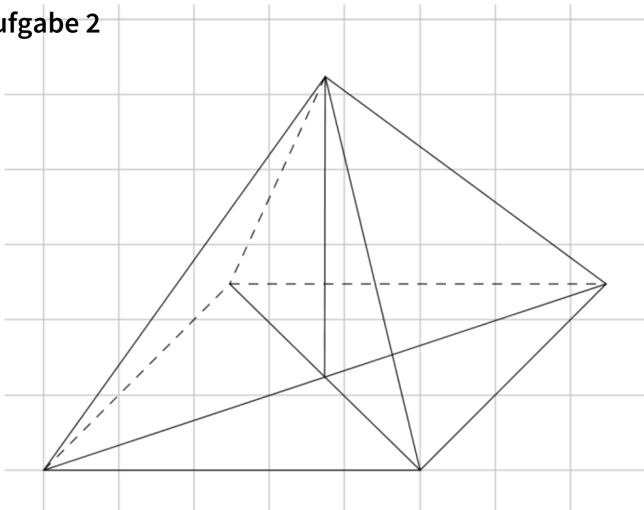


b)

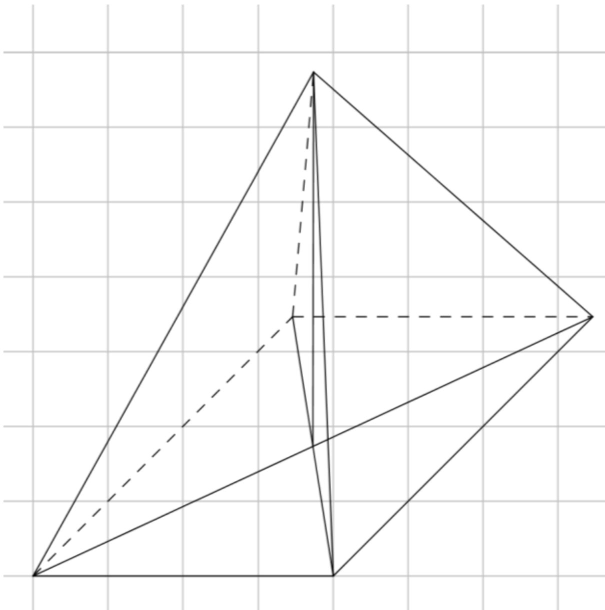


Aufgabe 2

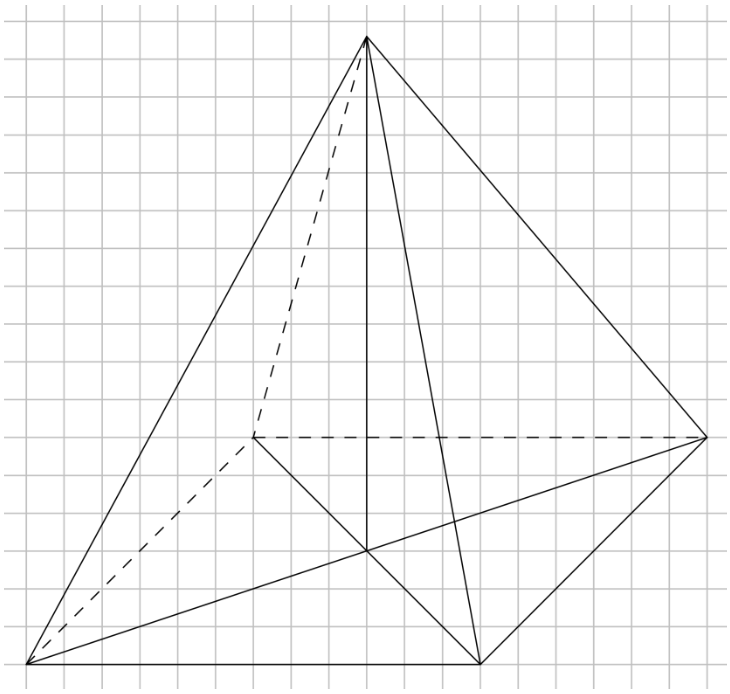
a)



b)



Aufgabe 3



Aufgabe 4

a) Die Abbildung zeigt kein korrektes Pyramiden-Schrägbild. Die Seitenkanten rechts hinten und links vorne sind sichtbar und müssen daher durchgezogen gezeichnet werden. Die Seitenkante links hinten und die Grundkanten links und hinten sind dagegen nicht sichtbar. Sie müssten gestrichelt gezeichnet werden.

b) Die Abbildung zeigt das korrekte Schrägbild einer spitzen Pyramide. Wenn du die Diagonalen der Grundfläche einzeichnest, siehst du, dass sich hier das untere Ende der Höhe befindet.

c) Die Abbildung zeigt kein korrektes Schrägbild einer senkrechten Pyramide; sie ist schief. Die Höhe müsste senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt stehen und nicht über der Mitte der Grundkante.

Autor:
Andreas von Scholz
Datum: 10.04.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Kegel-Schrägbilder (E)**

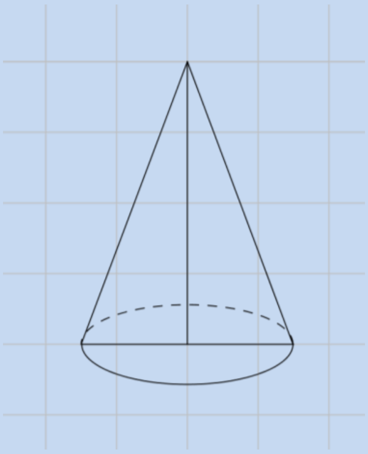
Mathematik
M5.08.15

Kompetenz

- **Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.**

Lernschritt

Kegel-Schrägbilder anfertigen



Bezug zu Teilkompetenzen

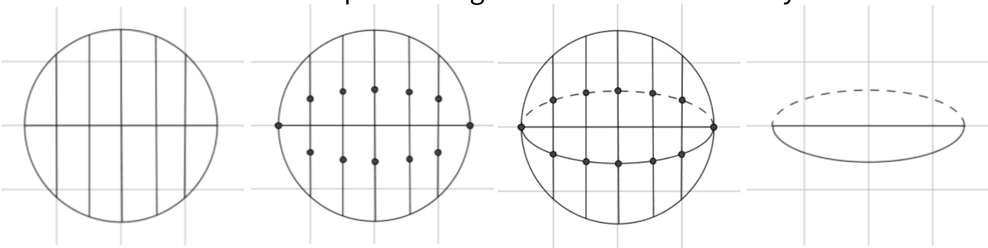
M5.08.15

Ich kann Schrägbilder von Kegeln zeichnen.

Schrägbilder von Kegeln

Schritt 1

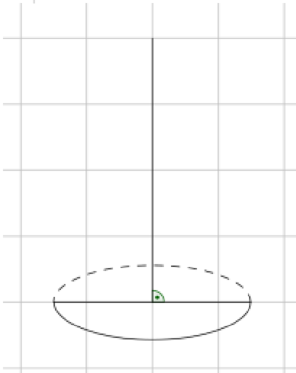
Zeichne die Grundfläche ellipsenförmig verzerrt wie bei einem Zylinder.



Wenn du keine Schrägbilder von Zylindern zeichnen kannst, dann arbeite zunächst mit dem Lernschritt **M5.08.15 Zylinder-Schrägbilder**.

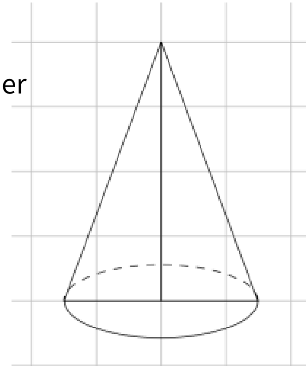
Schritt 2

Zeichne im Mittelpunkt des Durchmessers senkrecht die Höhe des Kegels ein (unverzerrt).



Schritt 3

Die Spitze des Kegels befindet sich im oberen Ende der eingezeichneten Höhe.
Verbinde die Spitze durch zwei Mantellinien mit dem linken und rechten Ende des Durchmessers.



Aufgabe 1

☞ Vervollständige die Abbildungen, so dass jeweils das Schrägbild eines Kegels entsteht.

a) ein Kegel mit 4 cm Höhe

b) ein Kegel mit 5 cm Höhe

Aufgabe 2

☞ Zeichne das Schrägbild eines Kegels mit folgenden Maßen:

a) r = 3 cm, h = 4 cm

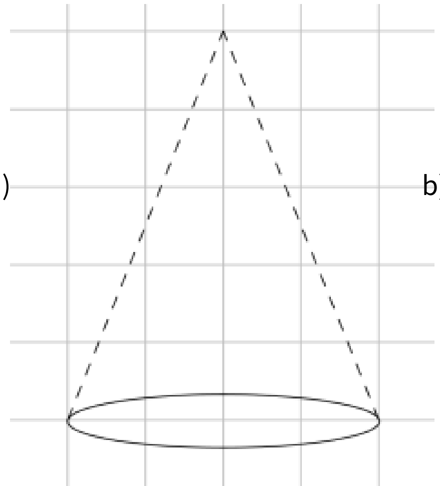
b) d = 4 cm, h = 7 cm

Aufgabe 3

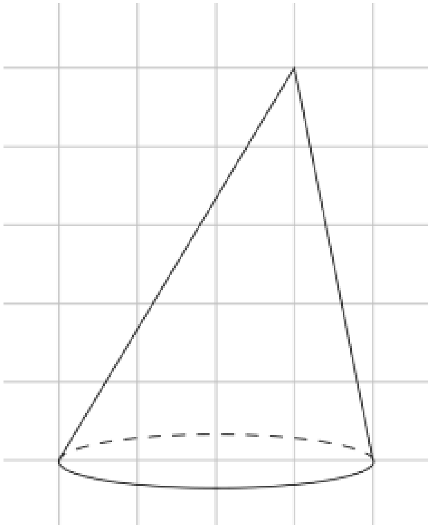
☞ Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen korrekte Darstellungen von Kegeln zeigen.

☞ Wenn du einen Fehler findest, erkläre, was falsch gemacht wurde.

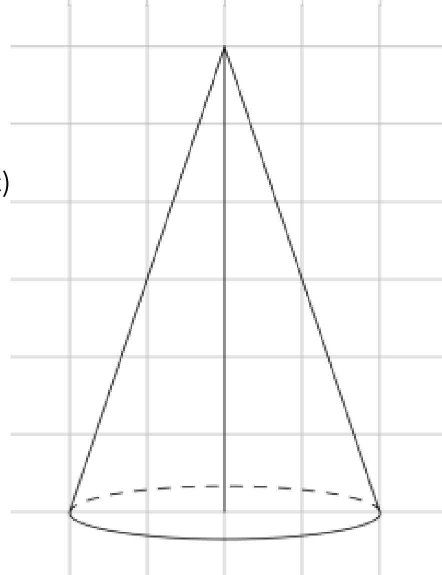
a)



b)



c)



Autor:
Andreas von Scholz
Datum: 10.04.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Kegel-Schrägbilder (E)**

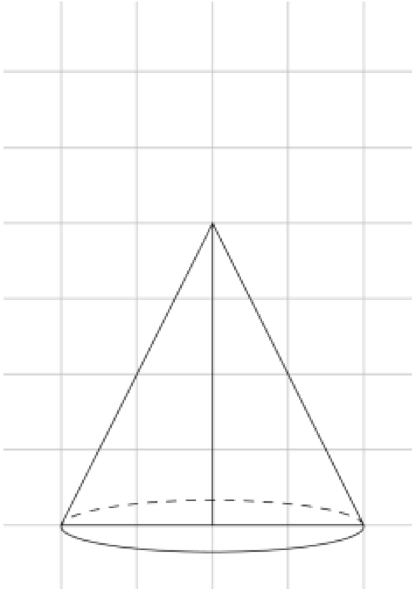
Kompetenz:
- **Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.**

Mathematik
M5.08.15

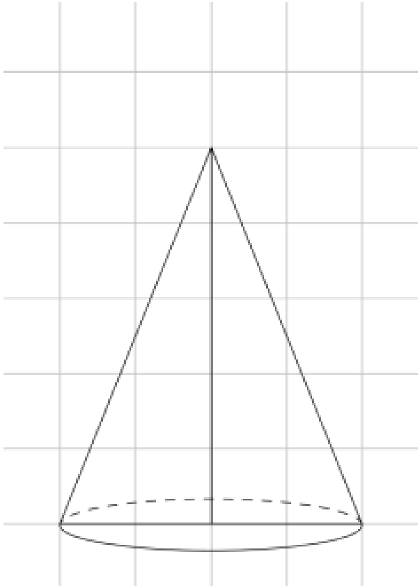
Lösung

Aufgabe 1

a)

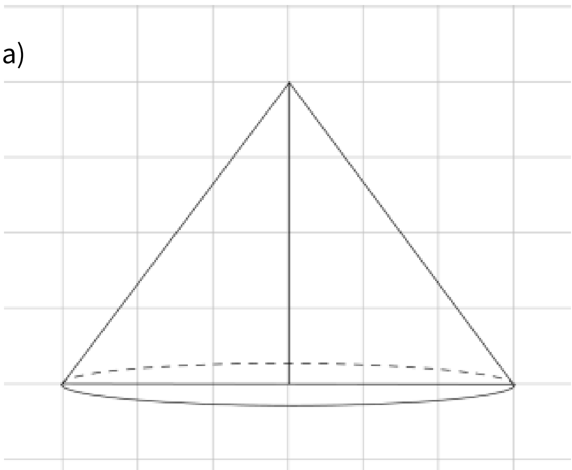


b)

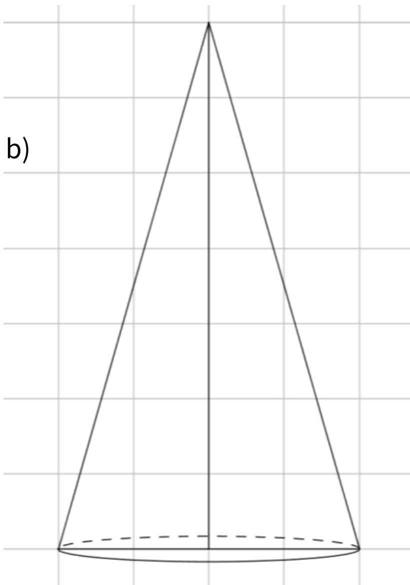


Aufgabe 2

a)



b)



Aufgabe 3

a) Die Abbildung zeigt kein korrektes Kegel-Schrägbild. Die Mantellinien müssten durchgezogen sein, der oberer Teil der Ellipsen-förmigen Grundfläche dagegen gestrichelt.

b) Die Abbildung zeigt kein korrektes Schrägbild eines senkrechten Kegels; sie ist schief. Die Höhe befindet sich nicht senkrecht über dem Mittelpunkt des Grundkreises.

c) Die Abbildung zeigt ein korrektes Schrägbild eines Kegels. (Man könnte hier noch den Durchmesser einzeichnen.)

Autor:
Andreas von Scholz
Datum: 10.04.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Süßigkeiten – ein Verpackungswunder**

Mathematik
M5.08

Kompetenz
- **Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.**

Lernthema

Süßigkeiten – ein Verpackungswunder

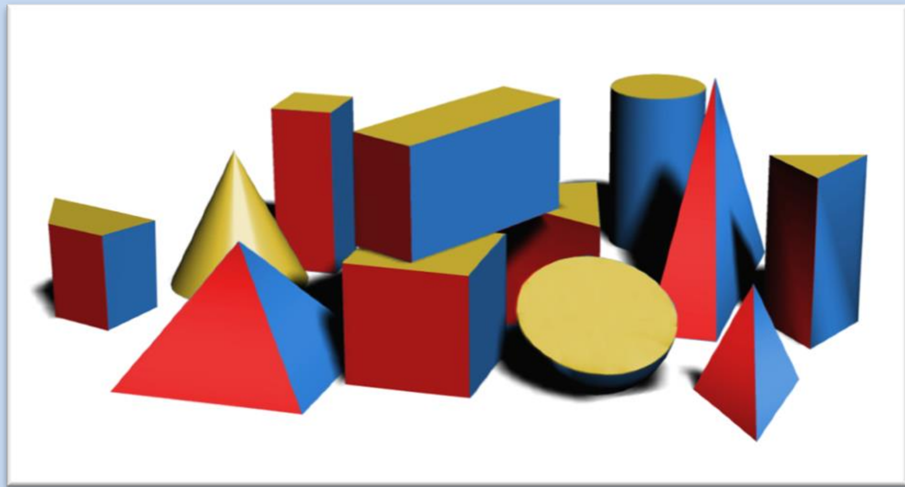


Abb.: Süßigkeitenverpackungen

Bezug zu Teilkompetenzen

M5.08.06

Ich kann vorgegebene Körper wie beispielsweise Verpackungen in Einzelflächen zerlegen und diese beschreiben.

M5.08.11

Ich kann Körper in Ansichten erkennen und sie benennen.

M5.08.17

Ich kann zu Gegenständen aus meiner Umwelt Schrägbilder skizzieren.

M5.08.19

Ich kann Zusammenhänge zwischen den Darstellungsformen (Netzen, Schrägbildern) und Modellen bei Prisma, Zylinder und Pyramide herstellen.

M4.10.05

Ich kann das Volumen eines Prismas bestimmen.

M4.10.06

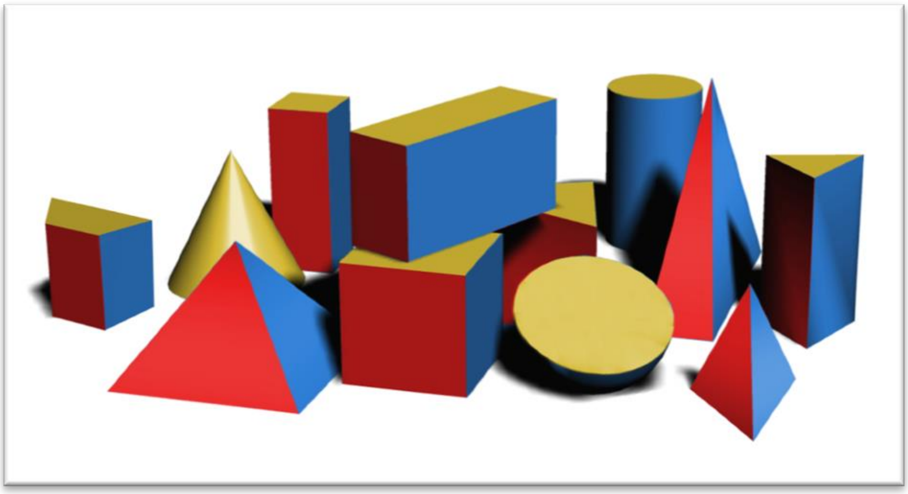
Ich kann die Formel für das Volumen eines Prismas nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.

M4.10.11

Ich kann das Volumen von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.

Süßigkeiten – ein Verpackungswunder

Viele Werbedesigner beschäftigen sich tagtäglich mit den Verpackungen von Süßigkeiten. Schließlich will jede Firma, dass die eigene Marke am meisten gekauft und damit möglichst viel Geld verdient wird. Dabei wissen die Firmen: je origineller die Verpackung ist, desto größer ist der Wiedererkennungswert.



Aufgabe 1

a) Sammle zuhause unterschiedliche Süßigkeitenschachteln und bring sie mit in die Schule.

b) Ordne die Süßigkeitenschachteln ihrer Form nach den geometrischen Körpern Zylinder, Prisma und Pyramide zu.

   ☞ Begründe deine Zuordnung.

   ☞ Skizziere jeweils ein Schrägbild des Körpers.

c) Welche Körper kannst du in der obigen Abbildung erkennen?

   ☞ Nenne die verschiedenen geometrischen Körper und ordne ihnen die einzelnen Modelle zu.

d) Schneide die mitgebrachten Schachteln an den Kanten auf.

   ☞ Zerlege sie so, dass die Einzelflächen weiterhin zusammenhängen.

   ☞ Zeichne die Körpernetze ab und skizziere dazu jeweils auch das Schrägbild.

e) Notiere die entstandenen Einzelflächen zu den jeweiligen Körpern Zylinder, Prisma oder Pyramide.

   ☞ Erstelle eine Tabelle und halte fest, an welchen Eigenschaften du deine Zuordnung festmachen kannst.

Aufgabe 2

Für Chips ist ein Zylinder eine häufig gewählte Verpackung. Dieser Zylinder hat meist folgende Maße: Höhe 25 cm, Durchmesser 8 cm.

a) Wähle nun Prismen und überlege dir, wie deren Maße sein sollten, damit sie gleich viel Volumen haben wie die ursprüngliche Chipspackung.

☞ Notiere die Maße mehrerer solcher Packungen.

☞ Überlege, ob es möglich ist, alle solche Packungen zu finden und begründe deine Antwort.

b) Überlege, ob es überhaupt sinnvoll ist, so viele unterschiedliche Packungen zu suchen.
Nach welchen Richtlinien entscheiden Hersteller wohl, welche Verpackung sie für welches Produkt wählen?

☞ Notiere jeweils mögliche Gründe.

c) Untersuche in einem nächsten Schritt in einem Supermarkt, welche geometrischen Körper tatsächlich als Verpackungen vorkommen.

☞ Notiere zu jedem Körper einige Beispiele und erstelle eine Rangliste bezüglich ihrer Häufigkeit.

d) Entwirf für deine Lieblingssüßigkeit eine ansprechende Verpackung, die den Kunden überzeugen könnte, das Produkt zu kaufen.

☞ Fertige zu deinem Entwurf ein Schrägbild und ein Netz an.

Aufgabe 3

Jetzt schauen wir noch genauer hin!

a) Für welche Art von Ware bietet sich welche Verpackung an?

b) Wenn du dir die Verpackungen und ihren Inhalt anschaust: Wie viel Volumen bleibt jeweils ungenutzt?

☞ Untersuche für mindestens drei Süßigkeitenpackungen, welcher Anteil am Volumen leer bleibt.

c) Würde es jeweils geschicktere Verpackungen geben, sodass weniger ungenutzter Raum bleibt?

☞ Überlege alternative Formen und berechne jeweils das Volumen des Körpers, in den du die ganze Süßigkeitenfüllung hineinbekommen würdest.

Autoren:
Daniela Eberhard
Andreas von Scholz
Datum: 21.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	Mathematik
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Süßigkeiten – ein Verpackungswunder**	**M5.08**

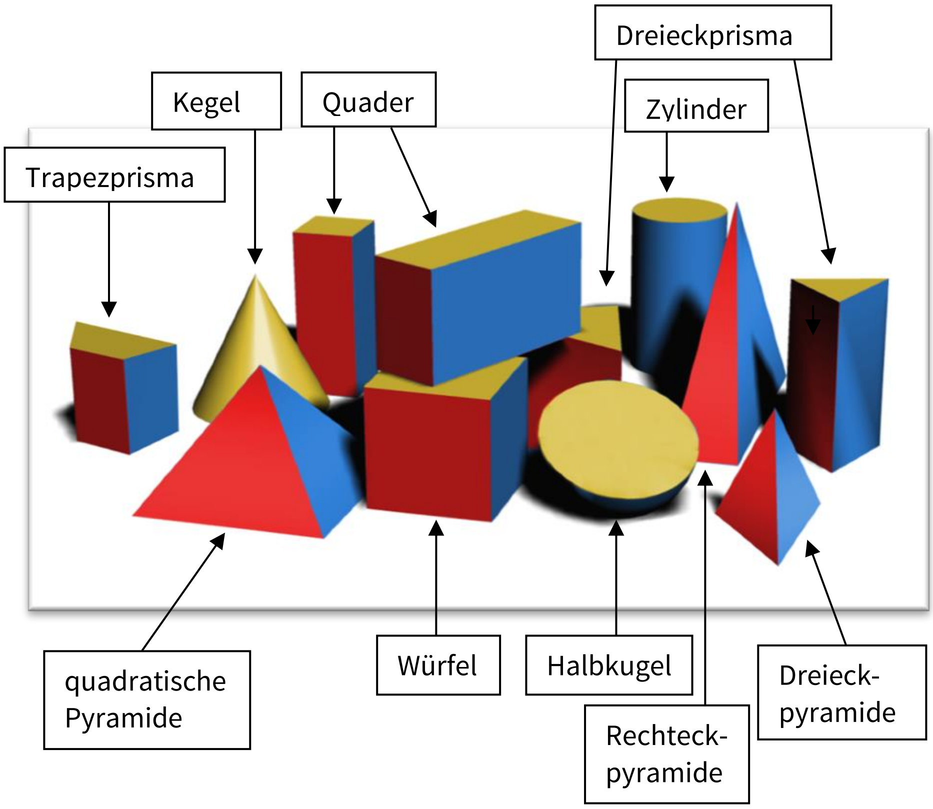
Kompetenz:
- **Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.**

Lösung

Aufgabe 1

a) und b) Individuelle Lösungen

c)



d) Individuelle Lösungen

e)

Körper	Flächen
Zylinder	2 Kreise 1 Rechteck
Dreiseitige Pyramide	4 Dreiecke
Vierseitige Pyramide	1 Rechteck 4 Dreiecke
Prisma	Grund- und Deckfläche (kann Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck,… sein) mehrere Rechtecke

Aufgabe 2

a) $V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Gegeben: h = 25 cm

r = 4 cm

R: $V = \pi \cdot (4)^2 \cdot 25\ \text{cm}^3 = \pi \cdot 400\ \text{cm}^3$

Mit $\pi \approx 3$ ergibt sich

$V = 1200\ \text{cm}^3$

Es gibt unendlich viele solcher Prismen. Je nach Höhe erhält man die benötigte Grundfläche, z. B. bei einer Höhe von 15 cm:

Aus $V = G \cdot h = 1200\ \text{cm}^3$ folgt $G = 1200\ \text{cm}^3 : 15\ \text{cm} = 80\ \text{cm}^2$

Zu jedem Grundflächenmaß gibt es nun unzählige verschiedene Formen, z. B. bei 15 cm Prismenhöhe und 80 cm^2 Grundfläche könnten dies sein:

- ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlängen 16 cm und 10 cm
- ein Parallelogramm mit Seitenlänge 20 cm und Höhe 8 cm
- ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von ca. 13,6 cm
- ein regelmäßiges Sechseck mit einer Seitenlänge von ca. 5,55 cm
- …

b) Nein, denn die Firmen möchten mit den Packungen zum einen auf sich aufmerksam machen, zum anderen müssen die Packungen aber auch einfach herzustellen sein, ihr Platz im Regal sollte praktikable Maße einnehmen,…

Mögliche Gründe für entsprechende Verpackungen:

- die ins Auge sticht und auffällt
- deren Herstellungskosten nicht zu groß sind
- die die Süßigkeiten in ansprechender Weise in Szene setzt
- die den Eindruck macht, als würde man eine großen Menge Süßigkeiten kaufen (Die Innenverpackung sorgt aber dafür, dass gar keine so große Menge darin Platz hat.)
- …

c) und d) Individuelle Lösungen

Aufgabe 3

Individuelle Lösungen

Autoren:
Daniela Eberhard
Andreas von Scholz
Datum: 21.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Kopfgeometrie**

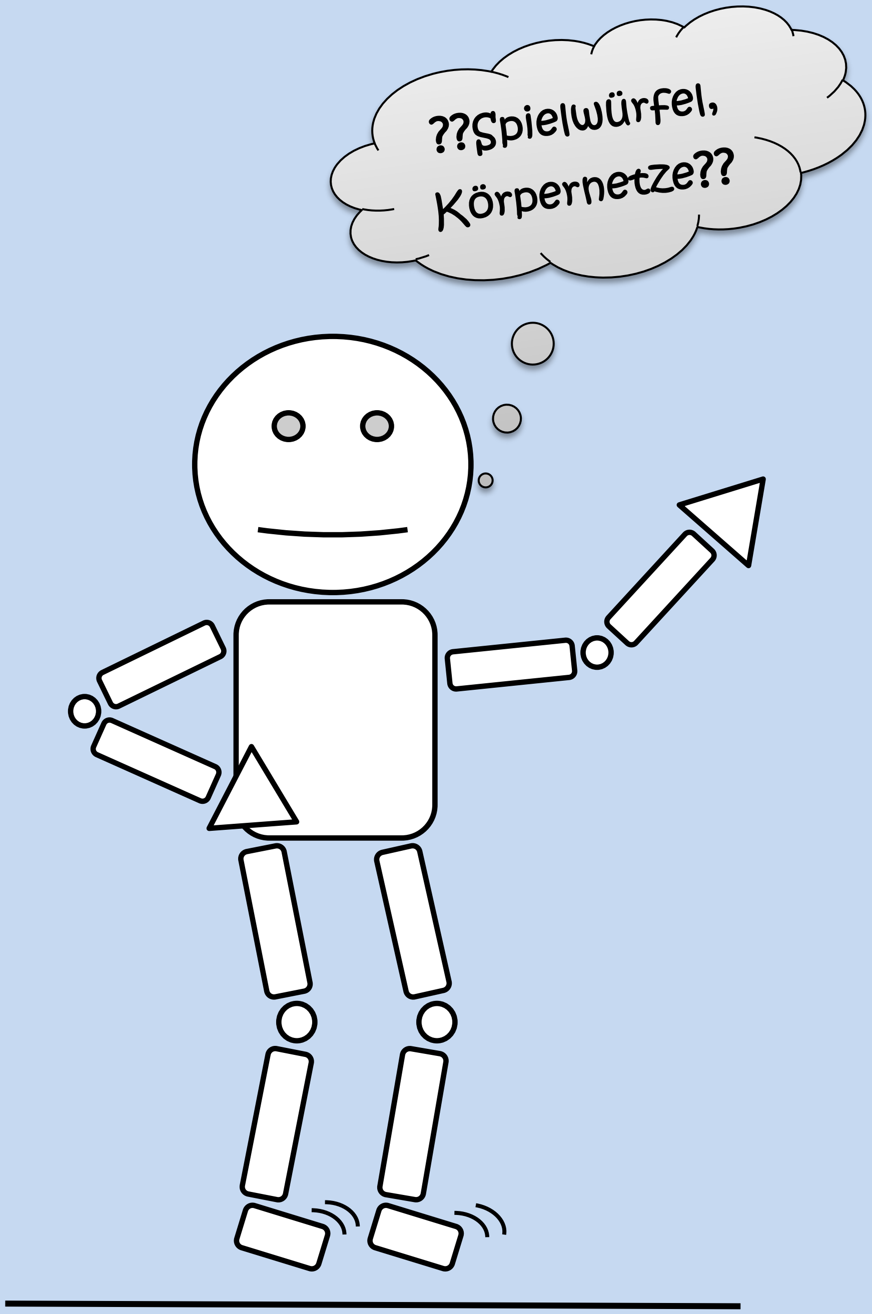
Kompetenz

- **Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.**

Mathematik
M5.08

Lernthema

Kopfgeometrie



Bezug zu Teilkompetenzen

M5.08.10

Ich kann mithilfe meines räumlichen Vorstellungsvermögens Aufgaben zu Körpern und Körpernetzen im Kopf lösen.

M5.08.08

Ich kann vorgegebene Einzelflächen so anordnen, dass sie ein Netz für einen vorgegebenen Körper bilden.

M5.08.09

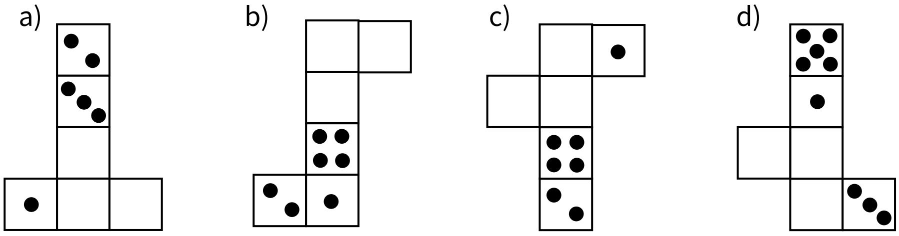
Ich kann bewerten und begründen, ob aus einem vorgegebenen Netz ein entsprechender Körper erstellt werden kann.

Aufgabe 1

Du siehst hier die Abbildung von vier unvollständigen Netzen von Spielwürfeln.

☞ Ergänze die Netze mit den entsprechenden Augenzahlen.

a) b) c) d)



Die gegenüberliegenden Augenzahlen ergeben zusammen immer 7.
Wenn du unsicher bis, kannst du einen Spielwürfel als Hilfe oder zur Kontrolle verwenden.

Aufgabe 2

Wenn man einen Spielwürfel betrachtet, kann man immer nur drei Seiten des Würfels gleichzeitig sehen.
Sieh dir ein Würfelnetz aus Aufgabe 1 an und löse die folgenden Aufgaben.

a) Kann es sein, dass du zugleich die Zahlen 6, 4 und 1 siehst?

☞ Begründe deine Antwort. Skizziere dazu das Schrägbild eines Spielwürfels.

b) Welche Gesamtaugenzahlen kannst du auf den drei Seiten sehen?

☞ Notiere mindestens 5 verschiedene Gesamtaugenzahlen!

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es?

☞ Trage alle Möglichkeiten zusammen und notiere:

Anzahl der Möglichkeiten: ____________________

Größte Gesamtaugenzahl: ____________________

Kleinste Gesamtaugenzahl: ____________________

Tipp: Du kannst deine Ergebnisse hinterher mit einem Würfel überprüfen.

Aufgabe 3

Stell dir vor, dass ein Spielwürfel so vor dir liegt, dass die Zahl sechs oben ist und die Fünf zu dir zeigt.

☞ Überlege zuerst, welche Zahl rechts liegt und kippe dann in Gedanken den Würfel nach folgender Anweisung. Notiere, welche Zahl am Ende nach oben zeigt.

a) Kippe den Spielwürfel zweimal nach hinten; danach einmal nach rechts.

b) Lege den Spielwürfel wieder wie oben beschrieben vor dich hin. Kippe ihn dreimal nach links, nun einmal nach vorne und zuletzt zweimal nach hinten.

c) Lege den Spielwürfel wieder wie oben beschrieben vor dich hin. Kippe ihn nun zweimal nach rechts, einmal nach hinten, dann nach rechts und zuletzt nach hinten.

☞ Erfinde eigene Aufgaben und lass diese von einem Klassenkameraden lösen.

Tipp: Du kannst das Netz eines Spielwürfels aus Aufgabe 1 als Hilfe verwenden und deine Ergebnisse mit einem Spielwürfel überprüfen.

Aufgabe 4

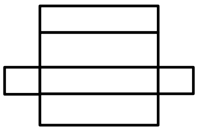
Hier sind verschiedene Netze abgebildet. Nicht bei allen handelt es sich um Körpernetze von Quadern.

☞ Umkreise die Körpernetze, die einen Quader darstellen.

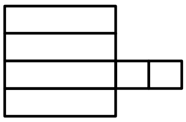
☞ Begründe deine Angaben.

☞ Korrigiere die Netze, aus denen sich kein Quader herstellen lässt, so dass Quadernetze entstehen.

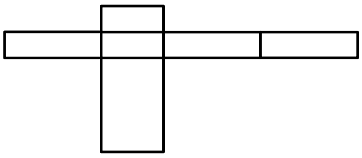
a)



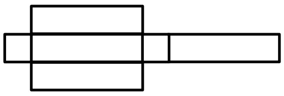
b)



c)



d)



e) Eigene Netze erstellen:

☞ Zeichne ein unvollständiges und ein fehlerhaftes Prismennetz. Gib es deinem Partner / deiner Partnerin und lass es korrigieren bzw. vervollständigen.

☞ Zeichne ein unvollständiges und ein fehlerhaftes Pyramidennetz. Gib es wieder deinem Partner / deiner Partnerin und lass es korrigieren bzw. vervollständigen.

Aufgabe 5

Aus folgenden Aussagen sollst du herausfinden, um welches Körpernetz es sich handelt.

☞ Lies die Aussage und trage den betreffenden Körper ein.

a) Mein Netz besteht aus einer quadratischen Grundfläche, um diese herum sind an deren Seiten vier Dreiecke angeordnet.

Es handelt sich um das Körpernetz von ______________________________

b) Mein Netz besteht aus sechs Quadraten.

Es handelt sich um das Körpernetz von ______________________________

c) Mein Netz besteht aus zwei Kreisen und einem Rechteck.

Es handelt sich um das Körpernetz von ______________________________

d) Mein Netz besteht aus zwei Dreiecken und drei Rechtecken.

Es handelt sich um das Körpernetz von ______________________________

☞ Erstelle selbst mit einem Partner / einer Partnerin solche Aufgaben. Tauscht sie aus und löst sie.

Aufgabe 6 Vorstellungsübung „Körper bauen“

☞ Lies deiner Partnerin / deinem Partner die Aufgabe vor. Diese(r) führt die Anweisungen in Gedanken aus. Am besten schließt sie / er dazu die Augen.

- Stelle dir ein regelmäßiges Sechseck aus Pappe vor.
- Verbinde die gegenüberliegenden Eckpunkte mit einem Stift, so dass das Sechseck in Dreiecke zerteilt wird.
- Schneide eines der Dreiecke heraus.
- Falte die anderen Dreiecke an den Kanten, die sie gemeinsam haben.
- Klebe die beiden Kanten, die durch das Herausschneiden des einen Dreiecks entstanden sind, zusammen. Jetzt wölbt sich die Fläche und eine räumliche Figur entsteht.
- Stelle die Figur auf ein Stück Pappe. Schneide die Fläche, auf der die Figur steht, aus der Pappe aus und klebe sie mit der Figur zusammen.

Tipp: Wenn euch die Vorstellung schwerfällt, könnt ihr die Aufgabe gemeinsam mit Papier, Lineal, Bleistift, Schere und Klebeband ganz praktisch durchführen.

☞ Lass deine Partnerin / deinen Partner die folgenden Fragen beantworten:

a) Welche Form hat die Fläche, auf der die Figur steht?

b) Wie heißt der entstandene Körper?

c) Wie viele Flächen begrenzen den Körper?

d) Wie viele Kanten, Ecken und Spitzen hat er?

☞ **Zusatzaufgabe**: Schreibt gemeinsam eigene Anweisungen zu anderen Körpern und lasst sie von euren Mitschülerinnen und Mitschülern lösen.

Aufgabe 7 Vorstellungsübung „Wanderung auf den Würfelkanten“

Hier siehst du einen Würfel abgebildet, dessen Ecken mit Buchstaben bezeichnet sind. Deine Partnerin / dein Partner wird dir sagen, wie du auf dem Würfel wandern sollst. Benutzt werden dazu folgende Satzanfänge:

- Starte im Punkt ….
- Gehe nach rechts … Gehe nach links … gehe nach oben …. Gehe nach unten … gehe nach hinten …. Gehe nach vorne.
- Wo kommst du an?

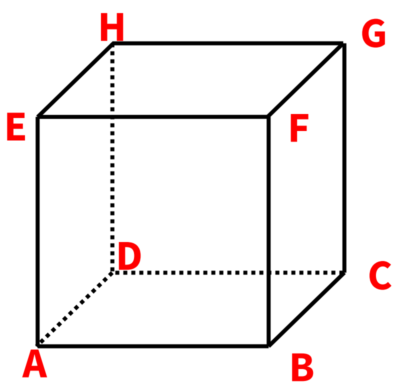
☞ Entscheidet, wer wandert und wer die Richtungen vorgibt.

☞ Der „Wanderer“ schließt die Augen und nennt am Ende den Zielpunkt.

Tipp: Wenn ihr mit der Vorstellung Probleme habt, könnt ihr am Anfang mit offenen Augen gemeinsam wandern.

Beispiel:

- Schaue dir den Würfel genau an.
- Merke dir die Bezeichnungen für die einzelnen Ecken.
- Schließe die Augen.
- Starte im Punkt C.
- Gehe nach oben.
- Gehe nach links.
- Gehe nach unten.
- Gehe nach vorne.
- Wo kommst du an?



Aufgabe 8 Vorstellungsübung „Netze zeichnen“

☞ Lies deiner Partnerin / deinem Partner die Aufgabe vor. Diese(r) führt die Anweisungen in Gedanken aus. Am besten schließt man dazu die Augen.

- Zeichne ein gleichseitiges Dreieck. Jede Seite soll etwa 5 cm lang sein. Beschrifte die Eckpunkte mit A, B und C und die Seiten mit a, b und c. Denke daran, dass die Seite a dem Punkt A gegenüberliegt, b liegt gegenüber dem Punkt B und c natürlich gegenüber dem Punkt C.

  Hast du es soweit geschafft?

- Markiere die Mitte einer jeden Seite des Dreiecks mit einem roten Punkt.
- Zeichne genau an jedem der drei roten Punkte mit dem Geodreieck eine Senkrechte zu der betreffenden Seite ein, die die Länge 7 cm hat.
- Benenne die Senkrechte, die auf der Seite c steht mit h_c und den Endpunkt dieser Senkrechte mit G.
- Benenne die Senkrechte auf der Seite b mit h_b, ihren Endpunkt mit F.
- Benenne die Senkrechte auf der Seite a mit h_a, ihren Endpunkt mit E.
- Verbinde die beiden Endpunkte der Seite c mit G.
- Verbinde die beiden Endpunkte der Seite b mit F.
- Verbinde die beiden Endpunkte der Seite a mit E.

  Hast du alles in Gedanken beschriftet?

Tipp: Wenn euch die Vorstellung schwerfällt, könnt ihr die Aufgabe gemeinsam mit Papier, Lineal, Bleistift, Schere und Klebeband ganz praktisch durchführen.

☞ Lass deine Partnerin / deinen Partner die folgenden Fragen beantworten:

a) Welche Form haben die an das gleichseitige Dreieck angehängten Flächen?

b) Welchen Körper erhältst du, wenn du die Figur ausschneidest und die äußeren Dreiecke an den gemeinsamen Kanten nach oben faltest?

c) Wo treffen sich bei diesem Körper die drei Seitenhöhen?

☞ **Zusatzaufgabe**: Schreibt gemeinsam eigene Anweisungen zu anderen Körpernetzen und lasst sie von euren Mitschülerinnen und Mitschülern lösen.

Aufgabe 9 Vorstellungsübung „Körper durch Verschiebung“

☞ Lies den folgenden Text und stell dir das Beschriebene vor.

Ein Dreieck hat einen rechten Winkel. Die beiden Seiten, die am rechten Winkel anliegen, sind 3 cm und 6 cm lang.
Man bewegt nun jeden der drei Eckpunkte senkrecht zur Dreiecksfläche um 4 cm nach oben. Nun wird jeder der Punkte des Dreiecks mit dem Punkt verbunden, den man durch die Verschiebung erhalten hat. Ebenso werden die drei erhaltenen Punkte miteinander verbunden. Es entsteht ein geometrischer Körper.

☞ Beantworte die folgenden Fragen.

a) Um welchen geometrischen Körper handelt es sich?

b) Wie viele Ecken und Kanten hat er?

c) Von wie vielen Flächen ist er begrenzt? Welche Form haben sie?

d) Wie groß ist sein Volumen?

Autoren:
Christine Fürch
Alexandra Hoffmann
Andreas von Scholz
Datum: 27.01.2016

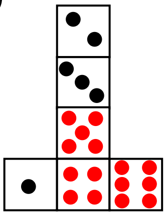
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	
5 Raum und Form	**LFS 8**	**Kopfgeometrie**	**Mathematik M5.08**

Kompetenz:
- **Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.**

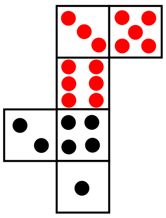
Lösung

Aufgabe 1

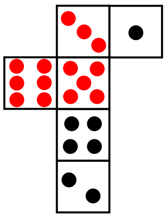
a)



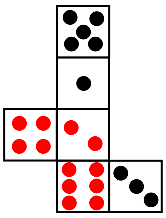
b)



c)



d)



Aufgabe 2

a) Einen solchen Spielwürfel kann es nicht geben, da die Zahlen 1 und 6 sich ja nicht gegenüberliegen können, wenn man sie gleichzeitig sehen kann.

a) Es sind die Gesamtaugenzahlen 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14 und 15 möglich.

b) Es gibt 8 Möglichkeiten (1,2,3 / 1,2,4 / 1,3,5 / 1,4,5 / 6,2,3 / 6,2,4 / 6,3,5 / 6,4,5).
Anzahl der Möglichkeiten: 8
Größte Gesamtaugenzahl: 15
Kleinste Gesamtaugenzahl: 6

Aufgabe 3

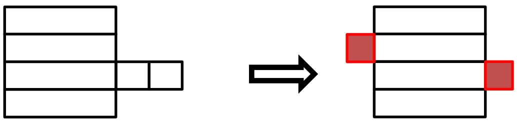
Rechts ist die Zahl 4.

a) Zahl 4 b) Zahl 5 c) Zahl 6

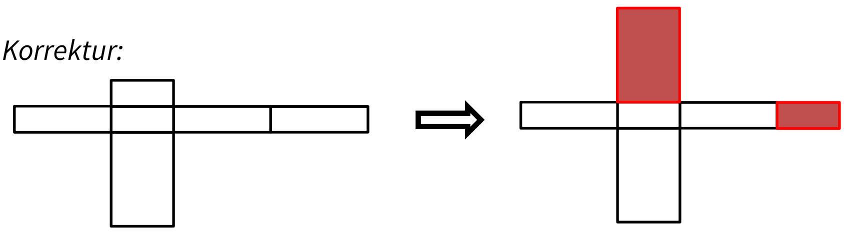
Aufgabe 4

a) Es handelt sich um ein Quadernetz: Gegenüberliegende Flächen sind identisch und aneinanderstoßende Kanten gleich lang.

b) Die Teilflächen sind nicht richtig angeordnet: damit die kleinen Flächen sich gegenüber liegen, dürfen sie nicht nebeneinander bzw. in der Abbildung auf derselben Seite sein. Außerdem müssen es Quadrate sein.
Mögliche Korrektur:



c) Die Anordnung der einzelnen Teilflächen ist zwar richtig, aber die Größen stimmen nicht: zwei gegenüberliegende Flächen müssen jeweils gleich groß sein.
Mögliche Korrektur:



d) Es handelt sich um ein Quadernetz: Gegenüberliegende Flächen sind identisch und aneinanderstoßende Kanten gleich lang.

e) Individuelle Lösungen

Aufgabe 5

Es handelt sich um das Körpernetz von…

a) einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche

b) einem Würfel

c) einem Zylinder

d) einem Prisma

Aufgabe 6

a) ein regelmäßiges Fünfeck

b) eine fünfseitige Pyramide

c) Die Pyramide wird von 6 Flächen begrenzt.

d) Sie hat 10 Kanten, 5 Ecken und eine Spitze.

Aufgabe 7

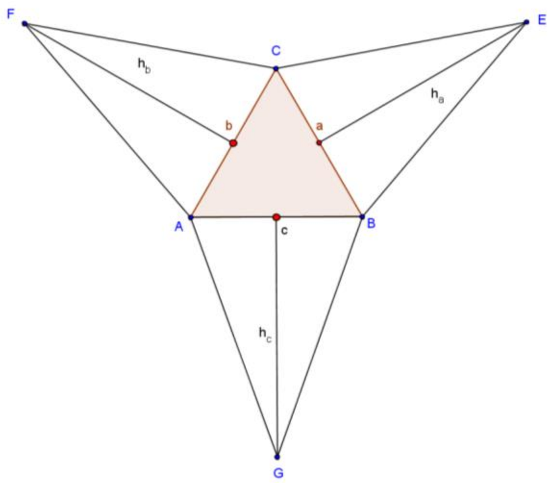
Im Beispiel wandert man zu Punkt A.

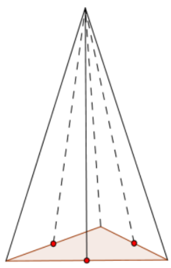
Aufgabe 8

a) Die angehängten Formen sind gleichschenklige Dreiecke.

b) Man erhält eine regelmäßige Dreieckspyramide.

c) Die Endpunkte der Seitenhöhen treffen sich in einem Punkt, der Spitze der Dreieckspyramide.





Anmerkung: Das Netz in der Lösung ist verkleinert.
Es hat nicht die Originalmaße.

Aufgabe 9

a) Dreiecksprisma

b) 6 Ecken und 9 Kanten

c) 5 begrenzende Flächen:
2 Dreiecke (Grund- und Deckfläche), 3 Rechtecke (Mantelfläche)

d) $V = \frac{1}{2} \cdot 3\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = \mathbf{36\text{ cm}^3}$ (Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck. Die Höhe des Prismas beträgt 4 cm.)

Autoren:
Christine Fürch
Alexandra Hoffmann
Andreas von Scholz
Datum: 27.01.2016

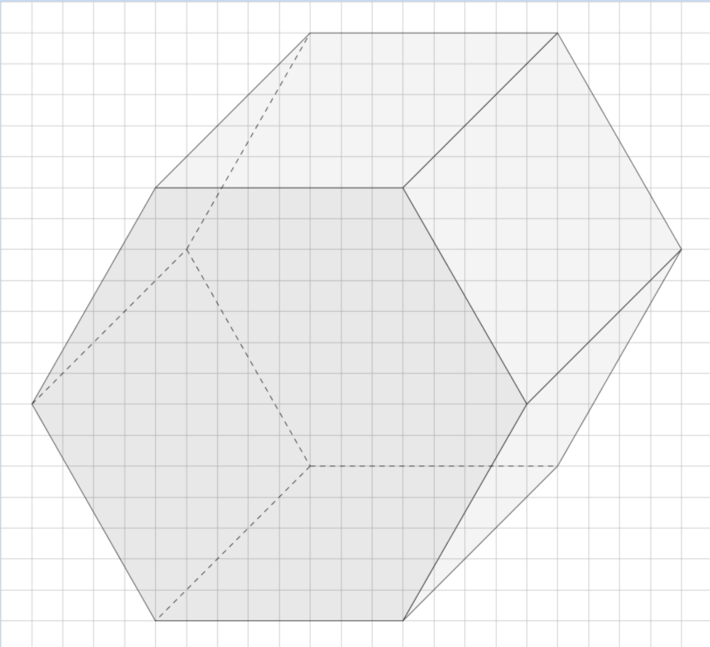
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Oberflächeninhalt von Prismen**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen (und Zylindern) berechnen.**

Mathematik
M4.10.02

Lernschritt

Oberflächeninhalt von Prismen



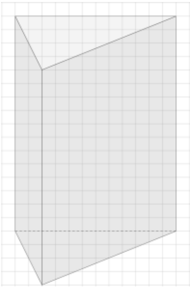
Bezug zu Teilkompetenzen

M4.10.02

Ich kann den Oberflächeninhalt von Prismen mit dreieckiger und viereckiger Grundfläche (Parallelogramm, Trapez) berechnen.

M4.10.03

Ich kann den Oberflächeninhalt von Prismen bestimmen.



Oberflächeninhalt eines Prismas bestimmen

Um den Inhalt der Oberfläche eines Prismas zu bestimmen, zerlegt man diese in mehrere Teile:

- zwei identische Vielecke als Grund- bzw. Deckfläche
- eine Mantelfläche aus mehreren Rechtecken.

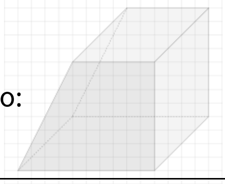
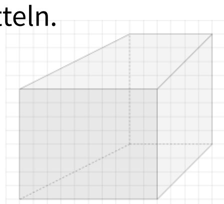
Den Flächeninhalt der Grund- bzw. Deckfläche kannst du berechnen, indem du die Fläche zeichnest und sie geschickt zerlegst. Bei Dreiecken oder einigen Vierecken kannst du die passenden Formeln für die Flächenberechnung verwenden.

Zur Erinnerung:
Ein **Prisma** ist ein geometrischer Körper, der ein Vieleck als Grundfläche und lauter parallele und gleich lange Seitenkanten hat.
Wir beschäftigen uns nur mit **senkrechten Prismen**. Sie haben als Seitenflächen lauter Rechtecke.

Jedes Rechteck der Mantelfläche hat als Länge die Prismenhöhe h und als Breite die zugehörige Grundkantenlänge l. Den Flächeninhalt der Einzelflächen berechnet man jeweils mit $l \cdot h$. Für die Mantelfläche addiert man diese Flächeninhalte.

Noch einfacher ist es, für die Mantelfläche die Gesamtgrundkantenlänge zu berechnen und mit der Höhe zu multiplizieren.

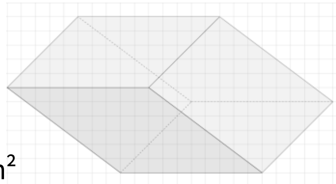
Zeichne das Schrägbild eines Prismas immer so, dass in der Ansicht die Grundfläche als Vorderseite zu sehen ist und die Rechteckflächen verzerrt als Seitenflächen dargestellt werden. Das ist viel leichter! Außerdem kannst du so auch den Inhalt der Grundfläche besser ermitteln.

So:  statt so: 

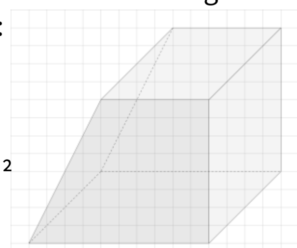
Zeichne immer die **Grundseite als Vorderseite**.

Beispiele:

a) Ein 5 cm hohes Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche, das lauter Seiten der Länge 5 cm und eine Höhe von 3 cm besitzt, hat einen Oberflächeninhalt von 130 cm², denn:
Grund- und Deckfläche: $G = 5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 15\text{ cm}^2$
Mantelflächenrechtecke: $A_R = 5\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 25\text{ cm}^2$
Oberflächeninhalt: $O = 2 \cdot G + 4 \cdot A_R = 130\text{ cm}^2$



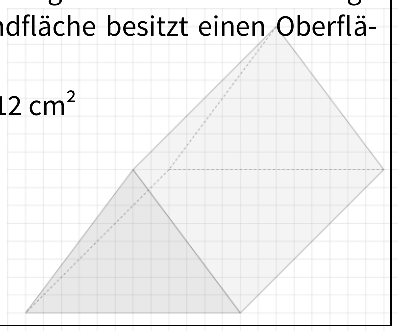
b) Man soll den Flächeninhalt eines 4 cm hohen Prismas berechnen mit einem rechtwinkligen Trapez als Grundfläche, dessen zueinander parallele Seiten 3 cm und 5 cm lang sind. Der Abstand dieser Seiten beträgt 4 cm.
Als Oberflächeninhalt erhält man 98 cm², denn:
Grund- und Deckfläche:
$G = (3\text{ cm} + 5\text{ cm}) : 2 \cdot 4\text{ cm} = 16\text{ cm}^2$
Mantelfläche:
$M = (3\text{ cm} + 4{,}5\text{ cm} + 5\text{ cm} + 4\text{ cm}) \cdot 4\text{ cm} = 66\text{ cm}^2$
Oberflächeninhalt: $O = 2 \cdot G + M = 98\text{ cm}^2$



Zeichne zunächst das Prisma (oder seine Grundfläche), um die benötigten Maße zu bestimmen.

Für die Berechnung der Mantelfläche sind alle Grundkanten wichtig. Die nicht senkrechte Seite hat hier eine Länge von 4,5 cm.

c) Ein 8 cm hohes Prisma mit einem gleichschenkligen Dreieck der Basislänge 6 cm und der Schenkellänge 5 cm als Grundfläche besitzt einen Oberflächeninhalt von 152 cm², denn
Grund- und Deckfläche: $G = \frac{1}{2} \cdot 6\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 12\text{ cm}^2$
Mantelflächenrechtecke:
$A_{R1} = 5\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} = 40\text{ cm}^2$ und
$A_{R2} = 6\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} = 48\text{ cm}^2$, also
insgesamt : $M = 2 \cdot A_{R1} + A_{R2} = 128\text{ cm}^2$
Oberflächeninhalt: $O = 2 \cdot G + M = 152\text{ cm}^2$



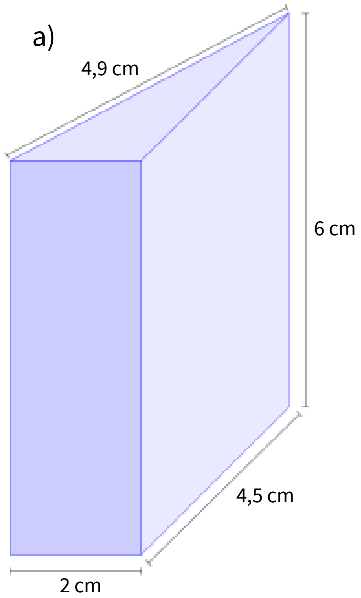
Die Höhe im gleichschenkligen Dreieck mit Basislänge 6 cm und Schenkellänge 5 cm beträgt 4 cm!

Alternativ:
$M = (5\text{ cm} + 5\text{ cm} + 6\text{ cm}) \cdot 8\text{ cm} = 128\text{ cm}^2$

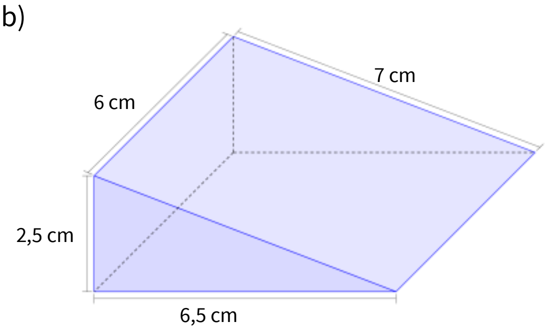
Aufgabe 1

☞ Berechne jeweils den Oberflächeninhalt des Prismas.

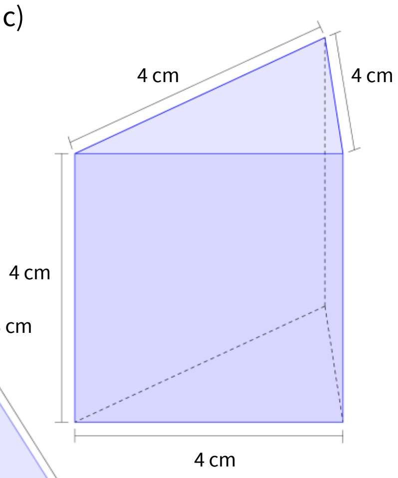
a)



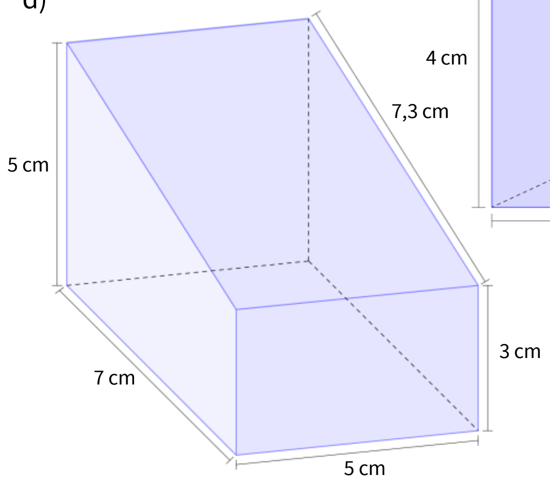
b)



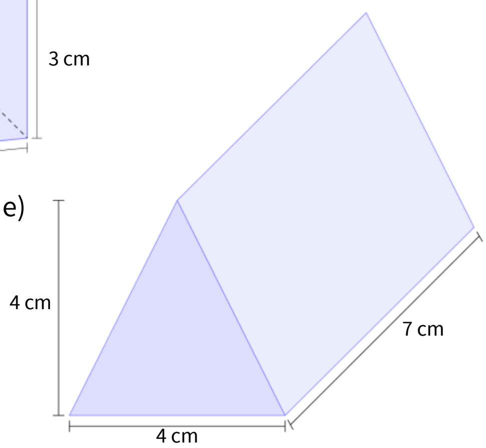
c)



d)

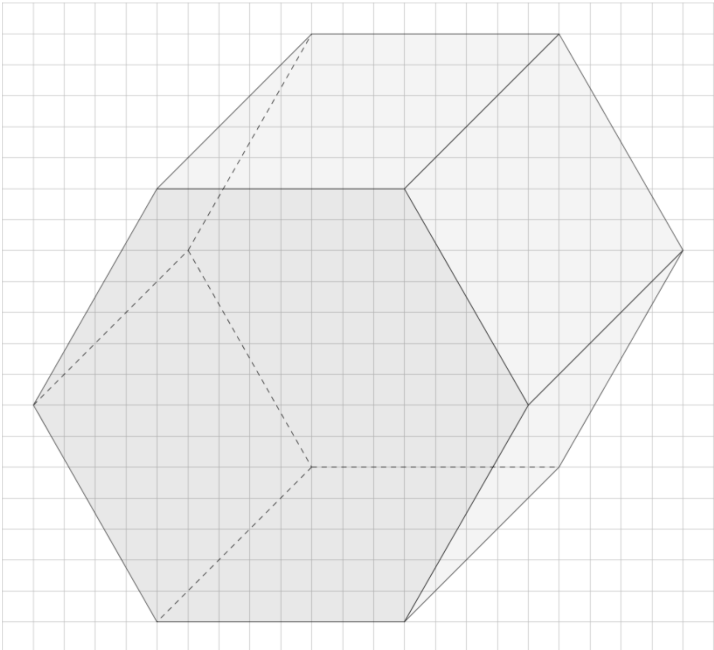


e)



Aufgabe 2

☞ Berechne den Oberflächeninhalt des abgebildeten Prismas.



Aufgabe 3

☞ Stelle zwei Formeln auf, mit denen man den Oberflächeninhalt eines regelmäßigen Dreieckprismas und eines regelmäßigen Sechseckprismas (mit Grundkantenlänge a und Höhe h) berechnen kann.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 19.10.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	
4 Messen	**LFS 10**	**Oberflächeninhalt von Prismen**	**Mathematik M4.10.02**
Kompetenz - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen (und Zylindern) berechnen.**			**Lösung**

Aufgabe 1

a) $O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\text{ cm} \cdot 4{,}5\text{ cm} + 4{,}5\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} + 2\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} + 4{,}9\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = \mathbf{77{,}4\text{ cm}^2}$

b) $O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2{,}5\text{ cm} \cdot 6{,}5\text{ cm} + (7\text{ cm} + 2{,}5\text{ cm} + 6{,}5\text{ cm}) \cdot 6\text{ cm} = \mathbf{112{,}25\text{ cm}^2}$

c) $O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot \sqrt{12}\text{ cm} + (4\text{ cm} + 4\text{ cm} + 4\text{ cm}) \cdot 4\text{ cm} \approx \mathbf{61{,}86\text{ cm}^2}$

mit $h_\Delta = \sqrt{(4\text{ cm})^2 - (4\text{ cm} : 2)^2} = \sqrt{12}\text{ cm}$

d) $O = 2 \cdot (5\text{ cm} + 3\text{ cm}) : 2 \cdot 7\text{ cm} + (3\text{ cm} + 7\text{ cm} + 5\text{ cm} + 7{,}3\text{ cm}) \cdot 5\text{ cm}$

$= \mathbf{167{,}5\text{ cm}^2}$

e) $O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} + (4\text{ cm} + 2 \cdot \sqrt{20}\text{ cm}) \cdot 7\text{ cm} \approx \mathbf{106{,}61\text{ cm}^2}$

mit Seitenkantenlänge $s = \sqrt{(4\text{ cm})^2 + (4\text{ cm} : 2)^2} = \sqrt{20}\text{ cm}$

Ab Teilaufgabe b) wurde zuerst jeweils die Gesamtgrundkantenlänge aufsummiert und dann durch Multiplikation der Flächeninhalt der Mantelfläche berechnet.

Aufgabe 2

Grundfläche: regelmäßiges Sechseck mit Grundkantenlänge 4 cm

zerlegbar in 6 gleichseitige Dreiecke (360° : 6 = 60° Winkel an der Spitze)

Höhe jedes Dreiecks: $h = \sqrt{(4\text{ cm})^2 - (4\text{ cm} : 2)^2} \approx 3{,}5\text{ cm}$

Flächeninhalt Sechseck: $A_S = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot 3{,}5\text{ cm} = 42\text{ cm}^2$

Oberfläche des Prismas mit 5 cm Höhe:

$O = 2 \cdot 42\text{ cm}^2 + 6 \cdot 4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = \mathbf{202\text{ cm}^2}$

Aufgabe 3

Grundfläche: regelmäßiges Dreieck mit Grundkantenlänge a

Höhe des Dreiecks: $h_\Delta = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

Flächeninhalt: $A_G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Oberfläche:

$O = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3\,a \cdot h = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + 3\,ah}$

Grundfläche: regelmäßiges Sechseck mit Grundkantenlänge a

zerlegbar in 6 gleichseitige Dreiecke (360° : 6 = 60° Winkel an der Spitze)

Höhe jedes Teildreiecks: $h_\Delta = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

Flächeninhalt Sechseck: $A_S = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

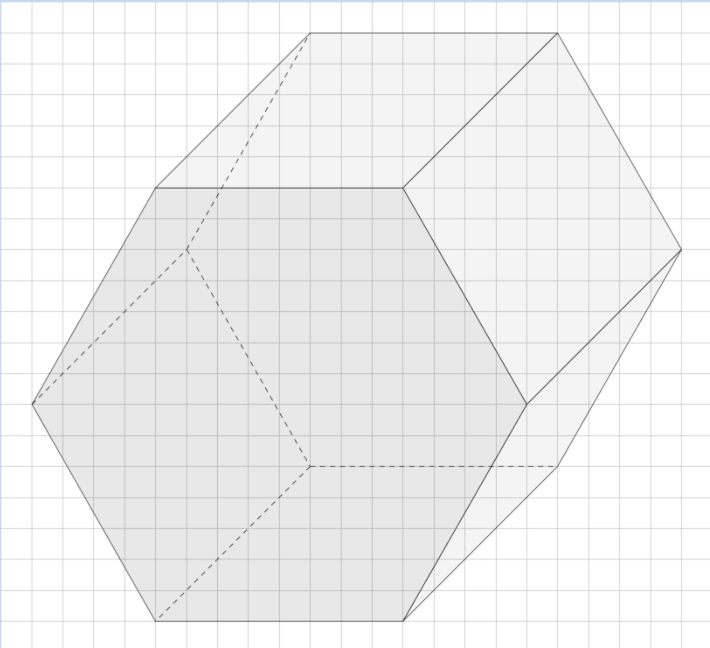
Oberfläche:

$O = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 + 6\,a \cdot h = \mathbf{3\sqrt{3}a^2 + 6\,ah}$

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 23.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	Mathematik
4 Messen	**LFS 10**	**Volumen von Prismen**	**M4.10.04**
Kompetenz - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen (und Zylindern) berechnen.**			**Lernschritt**

Volumen von Prismen



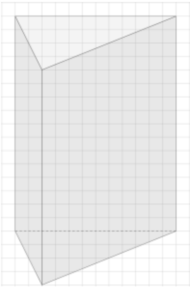
Bezug zu Teilkompetenzen

M4.10.04

Ich kann das Volumen von Prismen mit dreieckiger und viereckiger Grundfläche (Parallelogramm, Trapez) berechnen.

M4.10.05

Ich kann das Volumen eines Prismas bestimmen.



Volumen eines Prismas bestimmen

Um das Volumen eines Prismas zu berechnen, gehst du genau so vor wie bei einem Quader:
Du bestimmst den Inhalt der Grundfläche des Prismas und multiplizierst ihn mit seiner Höhe.

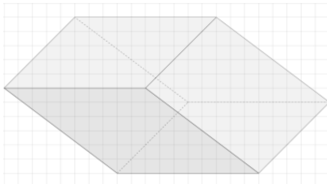
$$V = G \cdot h$$

Den Inhalt der Grundfläche erhältst du je nachdem, um welche Form es sich handelt, über die Formeln für den Flächeninhalt eines Dreiecks oder des betreffenden Vierecks.
Bei anderen Formen ist es am einfachsten, du zeichnest die Grundfläche und ermittelst dann ihren Flächeninhalt.

Zur Erinnerung:
Ein **Prisma** ist ein geometrischer Körper, der ein Vieleck als Grundfläche hat und der lauter parallele und gleich lange Seitenkanten hat.
Wir beschäftigen uns nur mit **senkrechten Prismen**. Sie haben als Seitenflächen lauter Rechtecke.

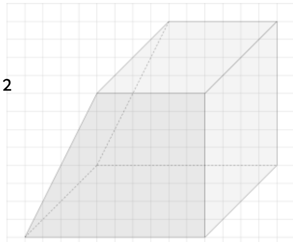
Beispiele:

a) Ein 5 cm hohes Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche, das lauter Seiten der Länge 5 cm und eine Höhe von 3 cm besitzt, hat ein Volumen von 75 cm³, denn:



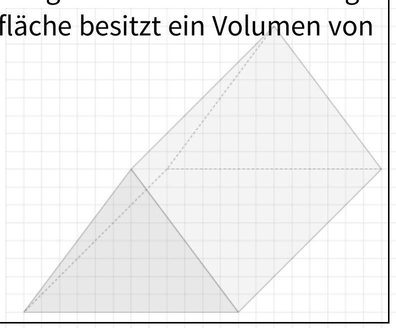
Grundfläche: $G = 5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 15\text{ cm}^2$
Volumen: $V = G \cdot h = 15\text{ cm}^2 \cdot 5\text{ cm} = 75\text{ cm}^3$

b) Man soll das Volumen eines 4 cm hohen Prismas berechnen mit einem Trapez als Grundfläche, dessen zueinander parallele Seiten 3 cm und 5 cm lang sind. Der Abstand der parallelen Seiten beträgt 4 cm.
Als Volumen erhält man 64 cm³, denn



Grundfläche: $G = (3\text{ cm} + 5\text{ cm}) : 2 \cdot 4\text{ cm} = 16\text{ cm}^2$
Volumen: $V = G \cdot h = 16\text{ cm}^2 \cdot 4\text{ cm} = 64\text{ cm}^3$

c) Ein 8 cm hohes Prisma mit einem gleichschenkligen Dreieck der Basislänge 6 cm und der Schenkellänge 5 cm als Grundfläche besitzt ein Volumen von 72 cm³, denn



Grundfläche: $G = \frac{1}{2} \cdot 6\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 12\text{ cm}^2$
$V = G \cdot h = 12\text{ cm}^2 \cdot 6\text{ cm} = 72\text{ cm}^3$

Zeichne zunächst das Prisma (oder seine Grundfläche), um die benötigten Maße zu bestimmen.

Berechne dann zuerst den Inhalt der Grundfläche.

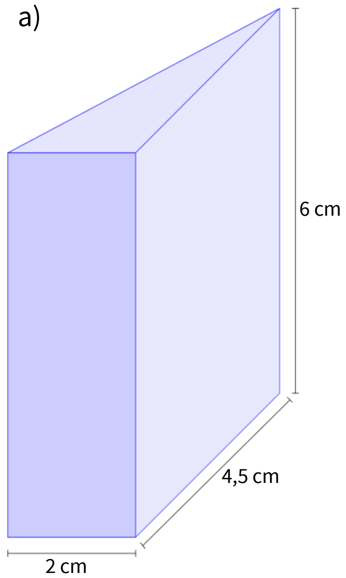
Multipliziere dein Ergebnis mit der Höhe des Prismas.

Die Höhe im gleichschenkligen Dreieck mit Basislänge 6 cm und Schenkellänge 5 cm beträgt 4 cm.

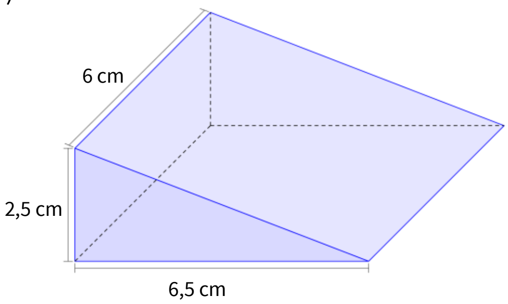
Aufgabe 1

☞ Berechne jeweils das Volumen.

a)

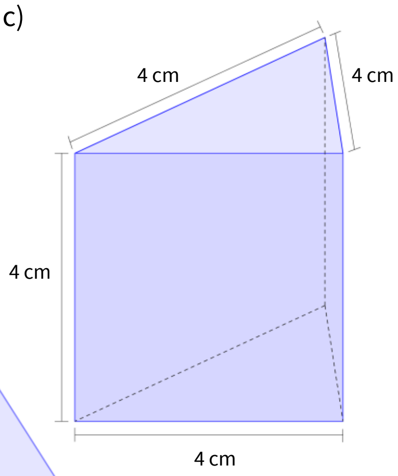


b)

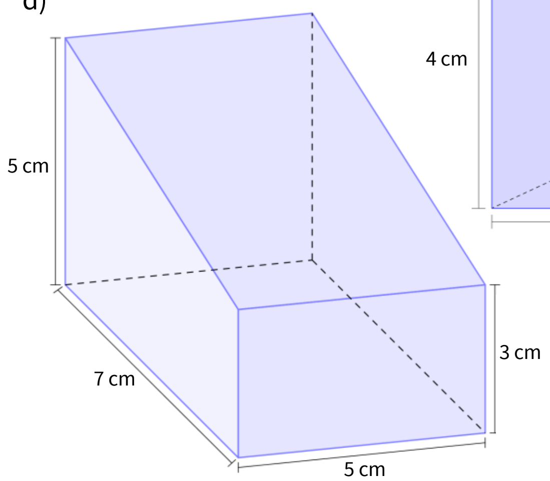


Entscheide zuerst, welches die Grundfläche des Prismas ist und berechne dann ihren Flächeninhalt.

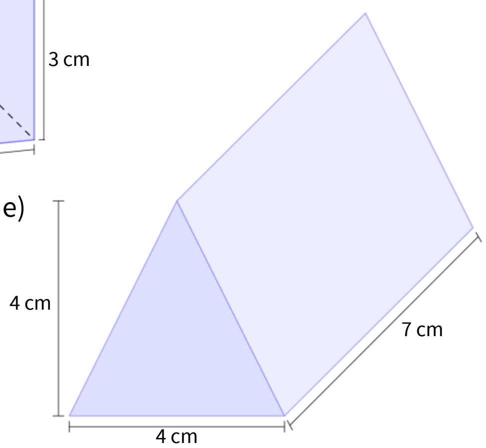
c)



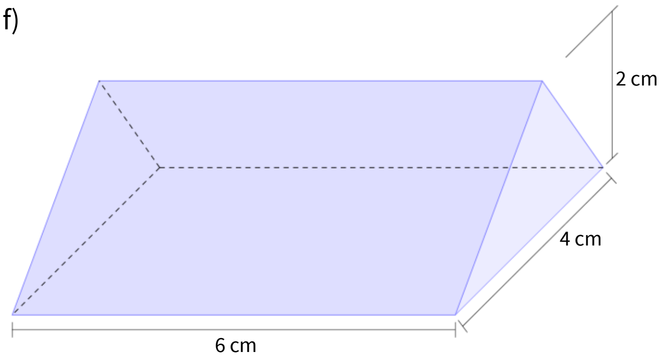
d)



e)

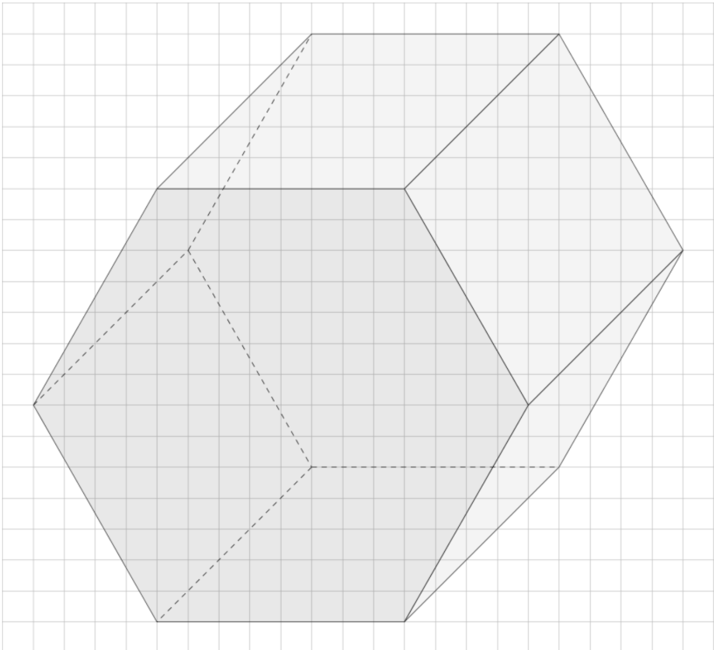


f)



Aufgabe 2

☞ Berechne das Volumen des abgebildeten Prismas.



Aufgabe 3

☞ Stelle zwei Formeln auf, mit denen man das Volumen eines regelmäßigen Dreieckprismas und eines regelmäßigen Sechseckprismas (mit Grundkantenlänge a und Höhe h) berechnen kann.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 23.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	
4 Messen	**LFS 10**	**Volumen von Prismen**	**Mathematik M4.10.04**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen (und Zylindern) berechnen.**			**Lösung**

Aufgabe 1

a) Grundfläche: rechtwinkliges Dreieck $G = \frac{1}{2} \cdot 2\text{ cm} \cdot 4{,}5\text{ cm} = 4{,}5\text{ cm}^2$
$V = G \cdot h = 4{,}5\text{ cm}^2 \cdot 6\text{ cm} = \mathbf{27\text{ cm}^3}$

b) Grundfläche: rechtwinkliges Dreieck $G = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5\text{ cm} \cdot 6{,}5\text{ cm} = 8{,}125\text{ cm}^2$
$V = G \cdot h = 8{,}125\text{ cm}^2 \cdot 6\text{ cm} = \mathbf{48{,}75\text{ cm}^3}$

c) Grundfläche: gleichseitiges Dreieck $G = \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot \sqrt{12}\text{ cm} \approx 6{,}93\text{ cm}^2$
mit $h_\Delta = \sqrt{(4\text{ cm})^2 - (4\text{ cm} : 2)^2} = \sqrt{12}\text{ cm}$
$V = G \cdot h \approx 6{,}93\text{ cm}^2 \cdot 4\text{ cm} = \mathbf{27{,}72\text{ cm}^3}$

d) Grundfläche: Trapez $G = (5\text{ cm} + 3\text{ cm}) : 2 \cdot 7\text{ cm}$
$= 28\text{ cm}^2$
$V = G \cdot h = 28\text{ cm}^2 \cdot 5\text{ cm} = \mathbf{120\text{ cm}^3}$

e) Grundfläche: Dreieck mit Höhe 4 cm $G = \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 8\text{ cm}^2$
$V = G \cdot h = 8\text{ cm}^2 \cdot 7\text{ cm} = \mathbf{56\text{ cm}^3}$

f) Grundfläche: Dreieck mit Höhe 2 cm $G = \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 4\text{ cm}^2$
$V = G \cdot h = 4\text{ cm}^2 \cdot 6\text{ cm} = \mathbf{24\text{ cm}^3}$

Aufgabe 2

Grundfläche: regelmäßiges Sechseck mit Grundkantenlänge 4 cm
zerlegbar in 6 gleichseitige Dreiecke (360° : 6 = 60° Winkel an der Spitze)
Höhe jedes Dreiecks: $h = \sqrt{(4\text{ cm})^2 - (4\text{ cm} : 2)^2} \approx 3{,}5\text{ cm}$
Flächeninhalt Sechseck: $A = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot 3{,}5\text{ cm} = 42\text{ cm}^2$
Volumen des Prismas mit 5 cm Höhe:
$V = G \cdot h = 42\text{ cm}^2 \cdot 5\text{ cm} = \mathbf{210\text{ cm}^3}$

Aufgabe 3

Grundfläche: regelmäßiges Dreieck mit Grundkantenlänge a
Höhe des Dreiecks: $h_\Delta = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$
Flächeninhalt: $A_G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
Volumen:
$V = G \cdot h = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot h}$

Grundfläche: regelmäßiges Sechseck mit Grundkantenlänge a
zerlegbar in 6 gleichseitige Dreiecke (360° : 6 = 60° Winkel an der Spitze)
Höhe jedes Teildreiecks: $h_\Delta = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$
Flächeninhalt Sechseck: $A_S = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$
Volumen:
$V = G \cdot h = \mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot h}$

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 23.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Volumenbestimmung von Prismen**

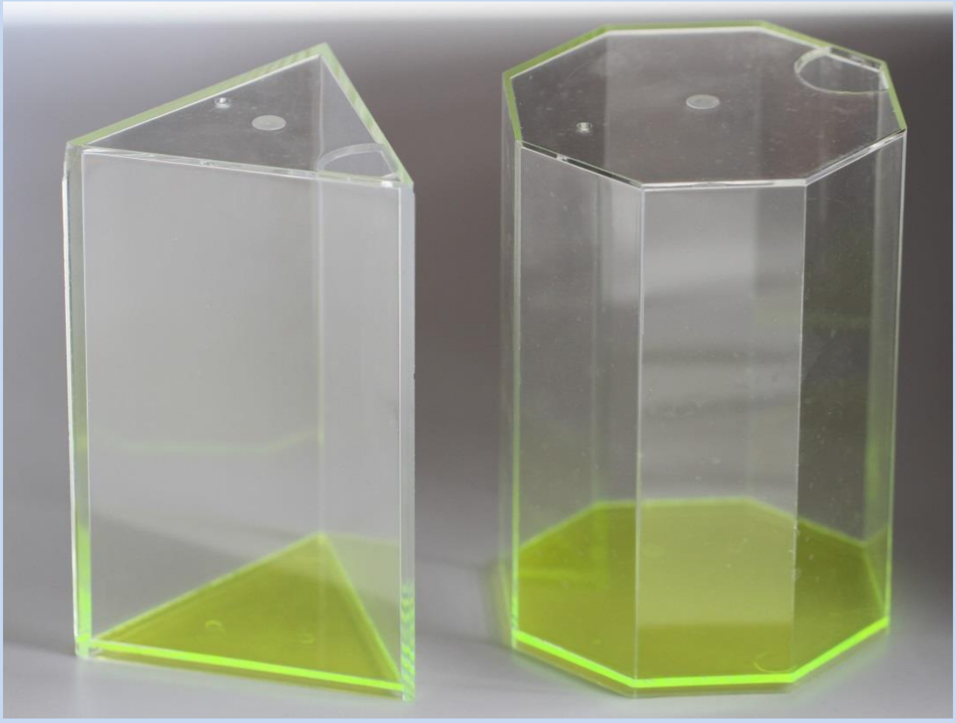
Kompetenz

- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen (und Zylindern) berechnen.**

Mathematik
M4.10.05

Lernschritt

Volumenbestimmung von Prismen



Bezug zu Teilkompetenzen

M4.10.05

Ich kann das Volumen eines Prismas bestimmen.

M4.10.07

Ich kann Volumen und Oberflächeninhalt von Prismen aus meiner Umwelt durch Ausmessen und berechnen ermitteln.

M4.10.04

Ich kann das Volumen von Prismen mit dreieckiger und viereckiger Grundfläche (Parallelogramm, Trapez) berechnen.

M4.10.01

Ich kann aus einem Prismenmodell oder Prismennetz Maße entnehmen und anhand der Teilflächen den Inhalt der Mantelfläche und der Oberfläche des Prismas bestimmen..

M4.10.02

Ich kann den Oberflächeninhalt von Prismen mit dreieckiger Grundfläche berechnen.

Ausmessen eines Prismas und Bestimmen seines Volumens und seiner Oberfläche

Was du benötigst:
- das Füllkörpermodell eines Dreiecksprismas
- Wasser
- einen Messbecher
- ein Lineal, Maßband o. ä.

Aufgabe 1

Nimm einen Füllkörper in der Form eines Dreieckprismas.

☞ Miss die Höhe und die Länge der Kanten der dreieckigen Grundfläche.

Höhe: ______________________________

Grundkantenlänge: __________________

☞ Zeichne das Dreieck und ermittle seinen Flächeninhalt.
Dreiecksfläche: ______________________

☞ Berechne mithilfe dieser Maße das Volumen des Prismas.

Volumen: ___________________________

☞ Fülle das Prisma mit Wasser, so dass es bis oben gefüllt ist.

☞ Schütte das Wasser aus dem Prisma in einen leeren Messbecher. Lies anhand der Markierung auf dem Messbecher das Füllvolumen ab.

Füllvolumen: ________________________

Stimmen beide Volumina überein?

☞ Erkläre eine mögliche Abweichung.

☞ Bestimme den Inhalt der Mantefläche / Oberfläche des Körpers.

Aufgabe 2

Was du benötigst:
- das Füllkörpermodell eines Achteckprismas
- Wasser
- einen Messbecher
- ein Lineal, Maßband o. ä.

Nimm einen Füllkörper in der Form eines achteckigen Prismas und führe mit ihm dasselbe durch:

☞ Miss die Höhe und die Länge der Kanten der achteckigen Grundfläche.

Höhe: ______________________________

Grundkantenlänge: __________________

☞ Zeichne das Achteck und ermittle seinen Flächeninhalt.
Achtecksfläche: ______________________

☞ Berechne mithilfe dieser Maße das Volumen des Prismas.

Volumen: ___________________________

☞ Fülle das Prisma mit Wasser, so dass es bis oben gefüllt ist.

☞ Miss das Füllvolumen mit Hilfe eines Messbechers.

Füllvolumen: ________________________

Stimmen beide Volumina überein?

☞ Erkläre eine mögliche Abweichung.

☞ Bestimme den Inhalt der Mantefläche / Oberfläche des Körpers.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 16.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Volumenbestimmung von Prismen**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen (und Zylindern) berechnen.**

Mathematik
M4.10.05

Lösung

Aufgabe 1

Höhe: **14 cm**
Grundkantenlänge: **6,5 cm**
Höhe des Dreiecks: **5,6 cm**
gemessen oder berechnet mit $h_\Delta = \sqrt{(6{,}5\ \text{cm})^2 - (3{,}25\ \text{cm})^2} \approx 5{,}6$ cm
Inhalt der dreieckigen Grundfläche:
$G = \frac{1}{2} \cdot 6{,}5\ \text{cm} \cdot 5{,}6\ \text{cm} = \mathbf{18{,}2\ cm^2}$
Volumen: $V = 18{,}2\ \text{cm}^2 \cdot 14\ \text{cm} \approx \mathbf{255\ cm^3}$
Mantelfläche: $M = 3 \cdot 6{,}5\ \text{cm} \cdot 14\ \text{cm} \mathbf{= 273\ cm^2}$
Oberfläche: $O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot 18{,}2\ \text{cm}^2 + 273\ \text{cm}^2 \mathbf{= 309{,}4\ cm^2}$

Aufgabe 2

Höhe: **14 cm**
Grundkantenlänge: **4 cm**
Inhalt der achteckigen Grundfläche: $\mathbf{77\ cm^2}$
z. B. über eine Zerlegung in 8 gleiche gleichschenklige Dreiecke mit 45° Winkel an der Spitze und Basislänge 4 cm. Mit einer Winkelweite von (180° – 45°) : 2 = 67,5° für die Basiswinkel erhält man eine Dreieckshöhe von ca. 4,8 cm.
$G = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\ \text{cm} \cdot 4{,}8\ \text{cm} \approx 77\ \text{cm}^2$
Volumen: $V = 77\ \text{cm}^2 \cdot 14\ \text{cm} \approx \mathbf{1078\ cm^3}$
Mantelfläche: $M = 8 \cdot 4\ \text{cm} \cdot 14\ \text{cm} \mathbf{= 448\ cm^2}$
Oberfläche: $O = 2 \cdot G + M \approx 2 \cdot 77\ \text{cm}^2 + 448\ \text{cm}^2 \mathbf{= 602\ cm^2}$

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 16.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Kaiser-Wilhelm-Gedächtniskirche**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen (und Zylindern) berechnen.**

Mathematik
M4.10

Lernthema

Die Kaiser-Wilhelm-Gedächtniskirche in Berlin

Bezug zu Teilkompetenzen

M4.10.03

Ich kann den Oberflächeninhalt von Prismen bestimmen.

M4.10.05

Ich kann das Volumen eines Prismas bestimmen.

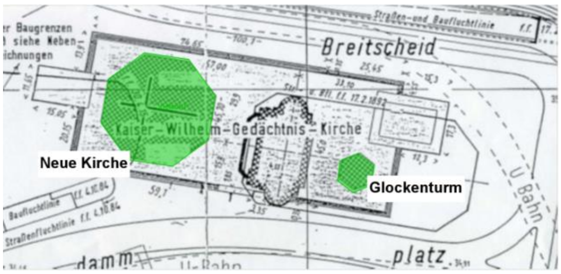
M5.08.12

Ich kann Grund- und Aufriss von Prismen zeichnen.

Kaiser-Wilhelm-Gedächtniskirche in Berlin

Die 1895 eingeweihte Kaiser-Wilhelm-Gedächtniskirche wurde im 2. Weltkrieg bei Luftangriffen weitgehend zerstört. 16 Jahre nach Kriegsende konnten die neu gebaute Kirche und der Glockenturm eingeweiht werden. Die Anlage besteht heute aus alten und neuen Gebäudeteilen. Die neue Kirche und der Glockenturm haben die Form von Prismen.

Die Höhe der neuen Kirche beträgt 22 m, der Außendurchmesser 35 m und die Länge jeder Grundkante 14,10 m. Der Turm hat einen Durchmesser von 10,50 m (von Seite zu Seite) und eine Grundkantenlänge von 6,10 m. Seine Höhe beträgt 53,50 m.



Lageplan der Kaiser-Wilhelm-Gedächtniskirche © Stiftung Kaiser-Wilhelm-Gedächtniskirche (CC BY SA)

Aufgabe 1

☞ Wähle einen geeigneten Maßstab und zeichne den Grundriss sowie den Aufriss der neuen Kirche und des neuen Glockenturms.

Grund- und Aufriss von Prismen: M5.08.12

Aufgabe 2

Die Außenmauern der neuen Kirche und des Glockenturms wurden von dem französischen Künstler Gabriel Loire mit blauen Glasbausteinen gestaltet.

☞ Berechne die Größe der vollständig von Glasbausteinen bedeckten Außenflächen der neuen Kirche und des Glockenturms.

Aufgabe 3

Der „umbaute Raum“ ist für die Gebäudewert-Bestimmung entscheidend.

☞ Bestimme den umbauten Raum der Kirche und des Glockenturms.

Das Volumen eines Gebäudes bezeichnet man als „umbauten Raum“. Dieser wird auch verwendet, um Baukosten zu kalkulieren.

Volumen von Prismen: M4.10.04

Aufgabe 4

a) Im Herbst 2015 wurde der Kirchturm für die Renovierung eingerüstet. Die Stellrahmen, die die Gerüstböden tragen, haben eine Höhe von 2,00 m.

☞ Bestimme, wie viele laufende Meter Gerüstboden für das Einrüsten des Glockenturms erforderlich sind.

b) Gerüstböden stehen in verschiedene Längen zur Verfügung. Für die Gerüststandzeit rechnet man damit, dass pro Woche etwa 70 m² der Außenfläche instandgesetzt werden können.

	Maß		**Mietpreis****	
EuroStellrahmen (Stahl)	Höhe 2,0 m		3,50 €	
Gerüstböden (robust, breit)	Länge* 1,57 m Länge* 2,57 m	Länge* 2,07 m Länge* 3,07 m	5,90 € 7,50 €	6,50 € 8,80 €

* Länge des Gerüstfeldes einschließlich der Stellrahmen
** je Gerüstteil pro angefangene 4 Wochen Mietdauer, incl. MwSt. Diagonalstreben, Verbindungsstücke und Geländer als Seitenschutz werden bei diesem Angebot nicht extra berechnet.

☞ Bestimme die Anzahl der benötigten Gerüstteile. Ermittle den Mietpreis.

Autoren:
Christine Fürch
Andreas von Scholz
Datum: 12.10.2015

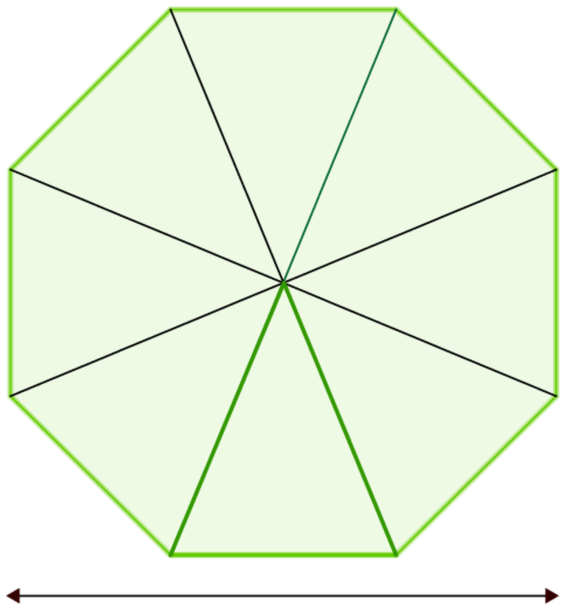
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	
4 Messen	**LFS 10**	**Kaiser-Wilhelm-Gedächtniskirche**	**Mathematik M4.10**
Kompetenz - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen (und Zylindern) berechnen.**			**Lösung**

Aufgabe 1

Maßstab 1:500

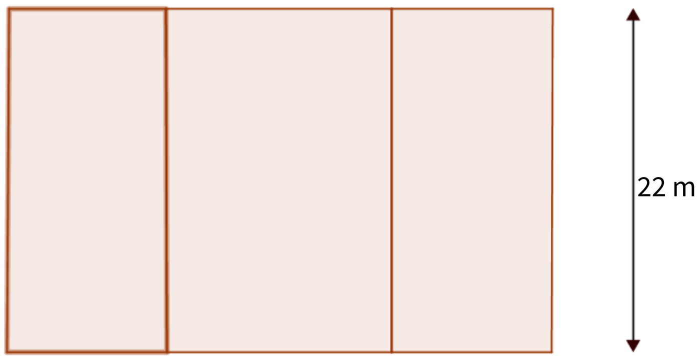
Neue Kirche

Grundriss

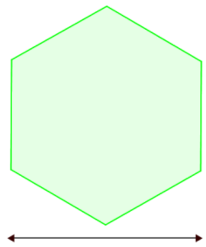


35 m

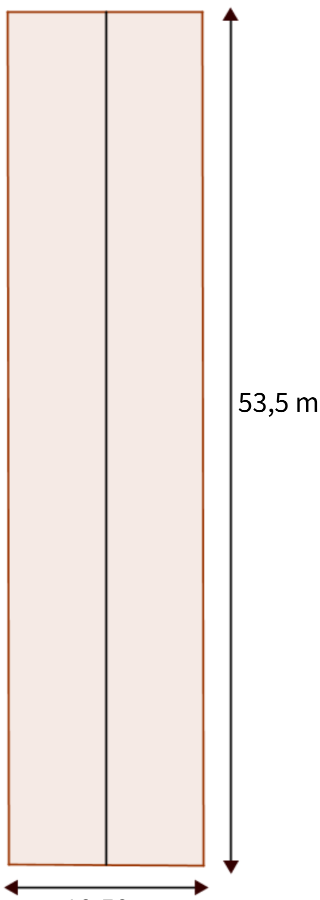
Aufriss



Glockenturm



10,50 m

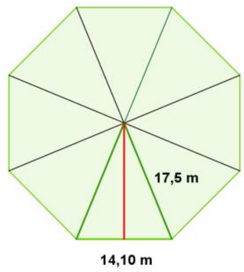


10,50 m

Aufgabe 2

Umfang der neuen Kirche: $u = 8 \cdot 14{,}1\ \mathrm{m} = 112{,}8\ \mathrm{m}$
Mantelfläche der neuen Kirche: $\mathrm{A_M} = \mathrm{u} \cdot \mathrm{h} = 112{,}8\ \mathrm{m} \cdot 21\ \mathrm{m} = 2368{,}8\ \mathrm{m}^2$
Die von Glasbausteinen bedeckte Fläche der Kirche beträgt etwa 2370 m^2.
Umfang des Glockenturms: $\mathrm{u} = 6 \cdot 6{,}1\ \mathrm{m} = 36{,}6\ \mathrm{m}$
Mantelfläche des Glockenturms: $\mathrm{A_M} = \mathrm{u} \cdot \mathrm{h} = 36{,}6\ \mathrm{m} \cdot 53{,}5\ \mathrm{m} = 1958{,}1\ \mathrm{m}^2$
Die von Glasbausteinen bedeckte Fläche des Glockenturms beträgt etwa 1960 m^2.

Aufgabe 3



Zerteilen der Grundfläche in acht gleichschenkliges Dreiecke.
Höhe eines der gleichschenkligen Dreiecke:

$$\mathrm{h}^2 = (17{,}5\mathrm{m})^2 - (7{,}05\ \mathrm{m})^2 = 306{,}25\ \mathrm{m}^2 - 49{,}7025\ \mathrm{m}^2$$

$$\mathrm{h} = \sqrt{256{,}5475}\ \mathrm{m} \approx 16{,}02\ \mathrm{m}$$

Fläche eines der gleichschenkligen Dreiecke:

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{g} \cdot \mathrm{h}}{2} = \frac{14{,}10\ \mathrm{m} \cdot 16{,}02\ \mathrm{m}}{2} \approx 112{,}94\ \mathrm{m}^2$$

Grundfläche der neuen Kirche:

$$\mathrm{A_{Achteck}} = 8 \cdot 112{,}94\ \mathrm{m}^2 = 903{,}52\ \mathrm{m}^3$$

Volumen bzw. umbauter Raum der neuen Kirche:

$$\mathrm{V_{neue\ Kirche}} = \mathrm{A_{Achteck}} \cdot \mathrm{h_{neue\ Kirche}}$$

$$\mathrm{V_{neue\ Kirche}} = 903{,}52\ \mathrm{m}^2 \cdot 22\ \mathrm{m} = 19877{,}44\ \mathrm{m}^3$$

Aufgabe 4

a) In der Höhe benötigt man 27 Etagen aus 2,00 m hohen Stellrahmen.
Für das Einrüsten wären 27 · 6 · 6,10 m = **988,20 m** laufende Gerüstbodenmeter nötig.

b) Bei 1958,1 m^2 Oberfläche rechnet man mit 1958,1 : 70 ≈ 28 Wochen Gerüststandzeit.
Benötigte Gerüstteile:
Für einen Umgang um den Glockenturm mit seiner sechseckigen Grundfläche benötigt man 3 · 6 = 18 Metallstellrahmen, insgesamt also 27 · 18 = 486 Stück.
Bei einer Länge von 3,07 m werden 2 · 6 = 12 Gerüstböden pro Umlauf benötigt. Für alle Umläufe sind es 12 · 27 = 324 Böden.
27 · 3 · 6 = 486 Stellrahmen à 2,00 m.
Kosten: 486 · 7 · 8,80 € = 29.937,60 €
27 · 2 · 6 = 324 Gerüstböden à 3,07 m.
Kosten: 324 · 7 · 3,50 € = 7.938,00 €
Gesamtkosten: 37.875,60 €

Autoren:
Christine Fürch
Andreas von Scholz
Datum: 12.10.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Plätzchenkerzen gießen**

Kompetenz

- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**

Mathematik
M4.10

Lernthema

Plätzchenkerzen gießen

Bezug zu Teilkompetenzen

M4.10.05

Ich kann das Volumen eines Prismas bestimmen.

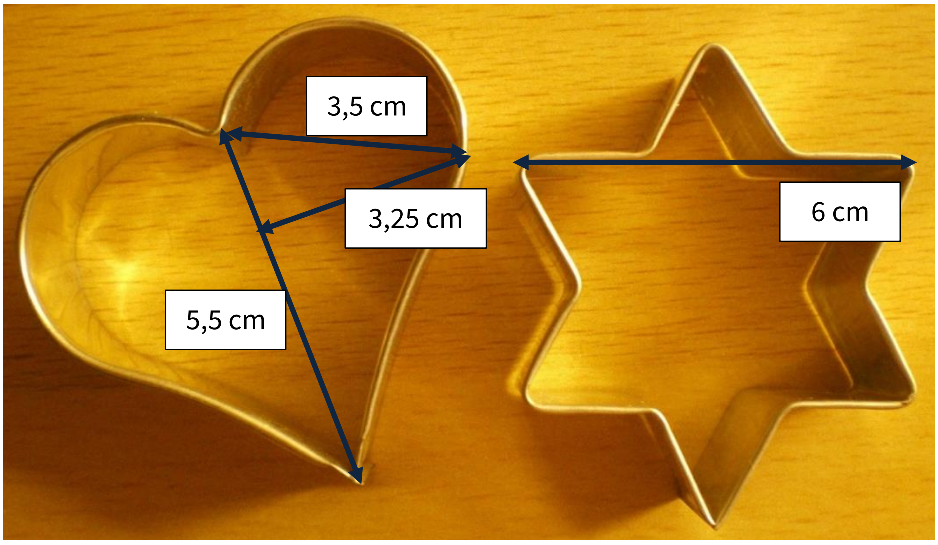
M4.10.07

Ich kann Volumen und Oberflächeninhalt von Prismen aus meiner Umwelt durch Ausmessen und Berechnen (auch unter Verwendung des Taschenrechners) ermitteln.

M4.09.04

Ich kann eine aus Dreiecken, Vierecken und Kreisen zusammengesetzte Figur in Teilflächen zerlegen und den Flächeninhalt der Figur berechnen.

Plätzchenkerzen gießen



Für den großen Weihnachtsbazar wollen die neunten Klassen kleine Kerzen herstellen und verkaufen.

Sie entscheiden sich für zwei einfache Formen (vgl. Bild), die etwa 2 cm hoch sind. Um die Kosten für die Aktion abzuschätzen, recherchieren sie im Internet und finden folgendes heraus:

- Eine günstige Ausstecherform kostet 40 ct.
- 500g Wachs reichen für etwa 500ml Volumen.
- Wachsfarbe für 1,5 kg Wachs kostet 1,50 €.
- 1000g weißes Paraffin/Stearin 80/20 kostet 6,20 €.
- 100 Dochthalter für Teelichte und Schwimmkerzen kosten 3,95 €
- 10 m Docht kosten 4,95 Euro €

Nun wird in den Klassen rege diskutiert:

- Wie viele Kerzen brauchen wir für den Weihnachtsbazar?
- Sollen wir Kerzenreste sammeln oder Paraffin kaufen? Welche Gründe sprechen für das eine, welche für das andere?
- Welche Gesamtkosten entstehen, wenn wir Kerzenreste sammeln, welche, wenn wir Wachs kaufen?
- Welchen Verkaufspreis müssten wir pro Kerze verlangen?

☞ Überlege und berechne Kosten und sinnvolle Verkaufspreise.

Zur Erinnerung für die Flächenberechnung bei den Ausstecherformen:
$A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$
$A_{Dreieck} = g \cdot h : 2$

Zur Erinnerung für die Berechnung von Höhen im rechtwinkligen Dreieck: Satz des Pythagoras
$a^2 + b^2 = c^2$

Autorin: Christine Fürch
Datum: 16.12.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Plätzchenkerzen gießen**

Kompetenz:
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**

Mathematik
M4.10

Lösung

Hinweis

Das Volumen eines aus mehreren Prismen und (Teil-)Zylindern zusammengesetzten Körpers lässt sich wie bei jedem Prisma oder Zylinder ebenfalls mit der Formel $V = G \cdot h$ berechnen.
Man berechnet also zunächst die aus verschiedenen Teilflächen zusammengesetzte Grundfläche und multipliziert anschließend mit der Höhe.

Volumen der Herzkerze

$$A = A_{\text{Kreis}} + 2 \cdot A_{\text{Dreieck}}$$

$$A_{\text{Kreis}} = \frac{d^2}{4} \cdot \pi = \frac{3{,}5\ \text{cm}^2}{4} \cdot \pi = 9{,}62\ \text{cm}^2$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 5{,}5\ \text{cm} \cdot 3{,}25\ \text{cm} = 8{,}94\ \text{cm}^2$$

$$\begin{aligned} V &= A \cdot h = (9{,}62\ \text{cm}^2 + 2 \cdot 8{,}94\ \text{cm}^2) \cdot 2\ \text{cm} \\ &= (9{,}62\ \text{cm}^2 + 17{,}88\ \text{cm}^2) \cdot 2\ \text{cm} \\ &= 55\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Volumen der Sternkerze

$$A = A_{\text{großes Dreieck}} + 3 \cdot A_{\text{kleines Dreieck}}$$

Höhe des großen Dreiecks

$$(3\ \text{cm})^2 + h^2 = (6\ \text{cm})^2$$

$$h = \sqrt{27\ \text{cm}^2} \approx 5{,}2\ \text{cm}$$

$$A_{\text{großes Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6\ \text{cm} \cdot 5{,}2\ \text{cm} = 15{,}6\ \text{cm}^2$$

Höhe des kleinen Dreiecks

$$(1\ \text{cm})^2 + h^2 = (2\ \text{cm})^2$$

$$h = \sqrt{3\ \text{cm}^2} \approx 1{,}7\ \text{cm}$$

$$A_{\text{kleines Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2\ \text{cm} \cdot 1{,}7\ \text{cm} = 1{,}7\ \text{cm}^2$$

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{großes Dreieck}} + 3 \cdot A_{\text{kleines Dreieck}} = 15{,}6\ \text{cm}^2 + 3 \cdot 1{,}7\ \text{cm}^2 \\ &= 20{,}7\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= A \cdot h = 20{,}7\ \text{cm}^2 \cdot 2\ \text{cm} \\ &= 41\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

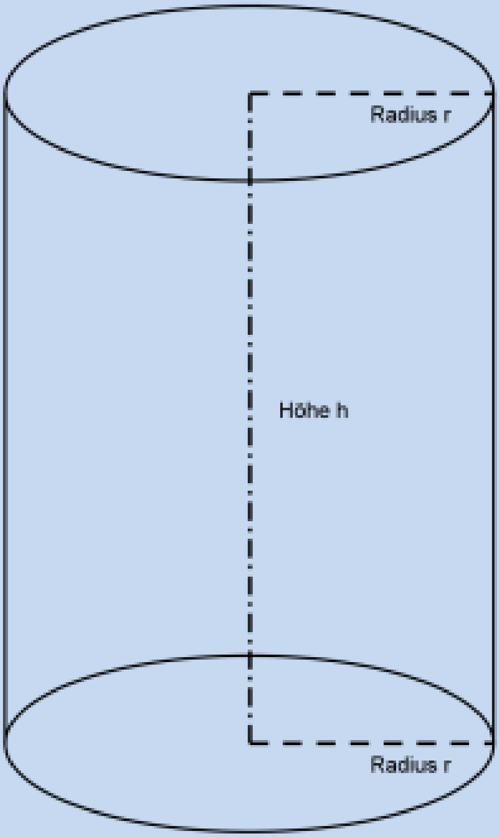
Autorin: Christine Fürch
Datum: 16.12.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Oberflächeninhalt von Zylindern**
Kompetenz - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**		

Mathematik
M4.10.09

Lernschritt

Inhalt der Zylinderoberfläche berechnen



Formel für den Oberflächeninhalt eines Zylinders:

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

oder

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$$

Bezug zu Teilkompetenzen

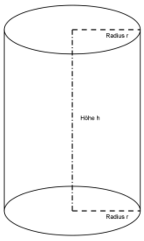
M4.10.09

Ich kann den Oberflächeninhalt von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.

M4.10.08

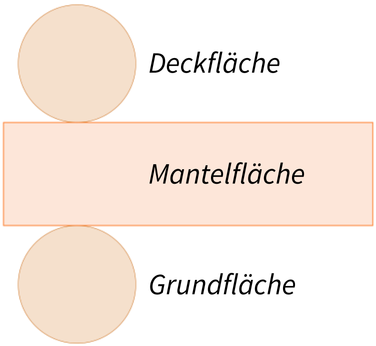
Ich kann aus einem Zylindermodell oder Zylindernetz Maße entnehmen und den Inhalt der Mantelfläche und der Oberfläche des Zylinders bestimmen.

Oberflächeninhalt eines Zylinders berechnen



Um den Oberflächeninhalt eines Zylinders mit Radius r und Höhe h zu berechnen, zerlegt man die Oberfläche in drei Teile:

- Die **Grundfläche** und die **Deckfläche** (zwei Kreisflächen mit Radius r (oben und unten)) und
- die **Mantelfläche** (ein Rechteck mit der Höhe h und dem Umfang der Kreisfläche als Breite).



Um die Mantelfläche zu erhalten, stellst du dir vor, dass du den Zylinder seitlich aufschneidest und die gewölbte Fläche abrollst und platt machst, so dass sie eben vor dir liegt.

Zur Erinnerung:
$A_{Kreis} = \pi \cdot (\text{Radius})^2$
$U_{Kreis} = 2 \cdot \pi \cdot \text{Radius}$
$A_{Rechteck} = \text{Länge} \cdot \text{Breite}$

Addiert man die Inhalte dieser drei Teilflächen, so erhält man

O = Grundfläche + Deckfläche + Mantelfläche bzw.
2 · Grundfläche + Mantelfläche oder

$$O = 2 \cdot (\pi \cdot r^2) + (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$$

Für den Oberflächeninhalt eines Zylinders mit Radius r und Höhe h gilt:

$$\mathbf{O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)}$$

Beispiele:

a) Ein Zylinder der *Höhe 20 cm* mit dem *Radius 4 cm* hat einen Oberflächeninhalt von ca. 600 cm^2, denn
$O = 2 \cdot \pi \cdot 4\text{ cm} \cdot (4\text{ cm} + 20\text{ cm}) = 192\text{ cm}^2 \cdot \pi \approx 603{,}19\text{ cm}^2$.

b) Grob überschlagen hat ein Zylinder der *Höhe 10 cm* mit dem *Radius 5 cm* einen Oberflächeninhalt von 450 cm^2, denn
$O \approx 2 \cdot \mathbf{3} \cdot 5\text{ cm} \cdot (5\text{ cm} + 10\text{ cm}) = 30\text{ cm} \cdot 15\text{ cm} = 450\text{ cm}^2$.

c) Ein Zylinder der *Höhe 60 cm* mit dem *Durchmesser 40 cm* hat einen Oberflächeninhalt von ca. 10050 cm^2, denn
$O = 2 \cdot \pi \cdot 20\text{ cm} \cdot (20\text{ cm} + 60\text{ cm}) = 3200\text{ cm}^2 \cdot \pi \approx 10053\text{ cm}^2$.

d) Ein Zylinder der *Höhe 14 cm* mit dem *Radius 4 mm* hat einen Oberflächeninhalt von ca. 3620 mm^2, denn
$O = 2 \cdot \pi \cdot 4\text{ mm} \cdot (4\text{ mm} + 140\text{ mm}) = 1152\text{ mm}^2 \cdot \pi \approx 3619{,}11\text{ mm}^2$.

Setze in der Formel für **r** den Radius und für **h** die Höhe des Zylinders ein.

Um den Oberflächeninhalt überschlagsmäßig im Kopf zu berechnen, rechnest du mit **3 als Näherungswert für** π.

Ist der **Durchmesser** des Zylinders gegeben, so musst du diesen zuerst halbieren, um den Radius zu erhalten.

Achte darauf, dass du beide **Längenangaben in derselben Einheit** verwendest.

Aufgabe 1

☞ Überschlage den Oberflächeninhalt des Zylinders. Berechne im Kopf.

a) Höhe: 10 cm, Radius: 1 cm

b) Höhe: 1 m, Radius: 2 cm

c) Höhe: 20 cm, Durchmesser: 20 cm

d) Höhe: 20 cm, Durchmesser: 3 cm

Aufgabe 2

☞ Berechne jeweils den Oberflächeninhalt des Zylinders.

a) Höhe: 25 cm, Radius: 4 cm

b) Höhe: 3 m, Radius: 60 cm

c) Höhe: 2,16 m, Radius: 8 cm

d) Höhe: 90 cm, Durchmesser: 30 cm

e) Höhe: 17 cm, Durchmesser: 48 mm

f) Höhe: 38 cm, Durchmesser: 9 cm

Berechne mit dem Taschenrechner. Verwende die Taste $\boxed{\pi}$ und runde dein Ergebnis.

Aufgabe 3

Eine 10 cm hohe, zylinderförmige Konservendose hat einen Durchmesser von 68 mm.

☞ Zeichne ein Netz der Dose und beschrifte es mit den entsprechenden Maßen.

☞ Berechne den Inhalt der Mantelfläche und der vollständigen Oberfläche der Dose.

Aufgabe 4

Suche drei verschiedene zylinderförmige Gegenstände.

☞ Miss jeweils Höhe und Durchmesser.

☞ Zeichne jeweils ein Netz und beschrifte es mit den entsprechenden Maßen

☞ Berechne jeweils den Inhalt der Mantelfläche und der vollständigen Oberfläche des zylinderförmigen Gegenstandes.

Du kannst zur einfachen exakten Bestimmung des Durchmessers auch den Umfang messen und den Durchmesser mithilfe der Kreisumfangsformel berechnen.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 05.10.2015

Kompetenzbereich **4 Messen**	Lernfortschritt **LFS 10**	Materialien/Titel **Oberflächeninhalt von Zylindern**
Kompetenz - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**		

Mathematik
M4.10.09

Lösung

Aufgabe 1

a) $O = 2 \cdot 3 \cdot 1\text{ cm} \cdot (10\text{ cm} + 1\text{ cm}) = 6\text{ cm} \cdot 11\text{ cm} = \mathbf{66\text{ cm}^2}$

b) $O = 2 \cdot 3 \cdot 2\text{ cm} \cdot (100\text{ cm} + 2\text{ cm}) \approx 12\text{ cm} \cdot 100\text{ cm} = \mathbf{1200\text{ cm}^2}$

c) $O = 2 \cdot 3 \cdot 10\text{ cm} \cdot (20\text{ cm} + 10\text{ cm}) = 60\text{ cm} \cdot 30\text{ cm} = \mathbf{1800\text{ cm}^2}$

d) $O = 2 \cdot 3 \cdot 15\text{ mm} \cdot (200\text{ mm} + 15\text{ mm}) = 90\text{ mm} \cdot 215\text{ mm}$
$\approx 100\text{ mm} \cdot 200\text{ mm} = 10\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} = \mathbf{200\text{ cm}^2}$

Aufgabe 2

a) $O = 2 \cdot \pi \cdot 4\text{ cm} \cdot (25\text{ cm} + 4\text{ cm}) = 232\text{ cm}^2 \cdot \pi \approx \mathbf{729\text{ cm}^2}$

b) $O = 2 \cdot \pi \cdot 60\text{ cm} \cdot (300\text{ cm} + 60\text{ cm}) = 43200\text{ cm}^2 \cdot \pi \approx \mathbf{135717\text{ cm}^2 \approx 13{,}6\text{ m}^2}$

c) $O = 2 \cdot \pi \cdot 8\text{ cm} \cdot (216\text{ cm} + 8\text{ cm}) = 3584\text{ cm}^2 \cdot \pi \approx \mathbf{11259\text{ cm}^2 \approx 1{,}1\text{ m}^2}$

d) $O = 2 \cdot \pi \cdot 15\text{ cm} \cdot (90\text{ cm} + 15\text{ cm}) = 3150\text{ cm}^2 \cdot \pi \approx \mathbf{9896\text{ cm}^2 \approx 1{,}0\text{ m}^2}$

e) $O = 2 \cdot \pi \cdot 24\text{ mm} \cdot (170\text{ mm} + 24\text{ mm}) = 9312\text{ cm}^2 \cdot \pi \approx \mathbf{29255\text{ mm}^2}$
$\mathbf{\approx 293\text{ cm}^2}$

f) $O = 2 \cdot \pi \cdot 45\text{ mm} \cdot (380\text{ mm} + 45\text{ mm}) = 38250\text{ cm}^2 \cdot \pi \approx \mathbf{120166\text{ mm}^2}$
$\mathbf{\approx 1202\text{ cm}^2}$

Aufgabe 3

Netz: siehe Rückseite

Mantelfläche: $M = (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot h = (2 \cdot \pi \cdot 34\text{ mm}) \cdot 100\text{ mm} \approx \mathbf{21363\text{ mm}^2}$

Oberfläche:
$O = 2 \cdot \pi \cdot 34\text{ mm} \cdot (100\text{ mm} + 34\text{ mm}) = 9112\text{ mm}^2 \cdot \pi \approx 28626\text{ mm}^2$
$\mathbf{\approx 286\text{ cm}^2}$

Alternative:
Grundfläche: $G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (34\text{ mm})^2 \approx \mathbf{3632\text{ mm}^2}$
Oberfläche: $O = 2 \cdot G + M \approx 7264\text{ mm}^2 + 21363\text{ mm}^2 = 28625\text{ mm}^2 \approx \mathbf{286\text{ cm}^2}$

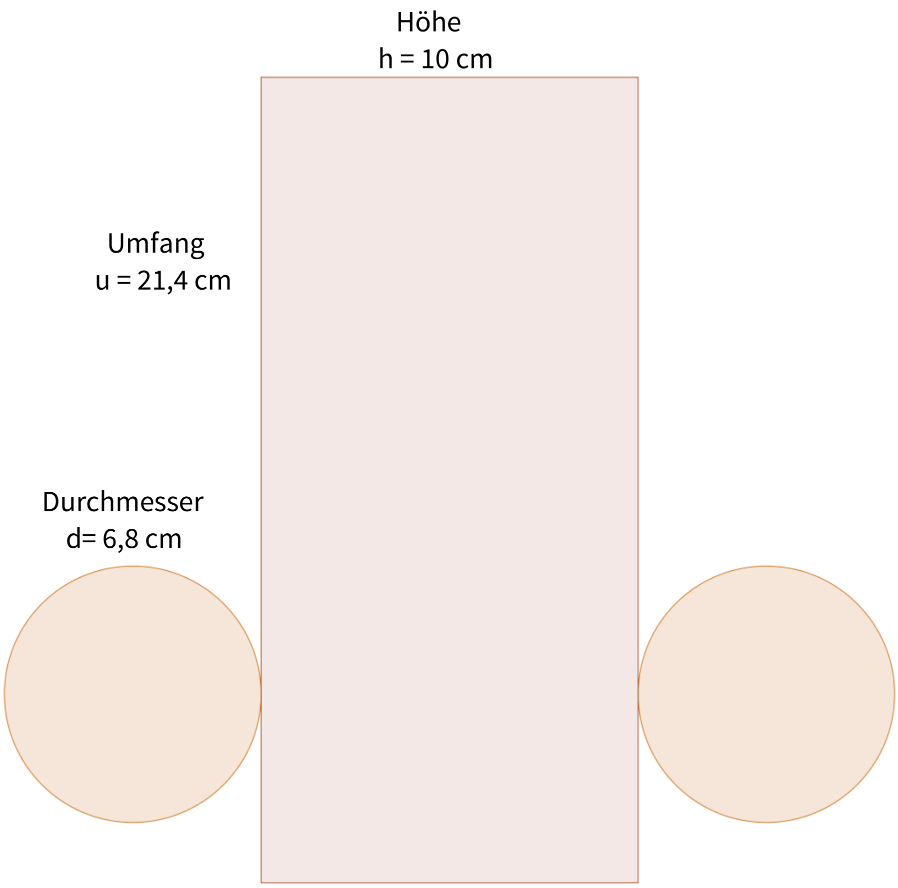
Aufgabe 4

Individuelle Lösungen zu drei weiteren zylinderförmigen Gegenständen

Vergleiche mit Aufgabe 3.

zu Aufgabe 3

Netz der Konservendose, hier im Maßstab 1 : 2 abgebildet



Autor: Andreas von Scholz
Datum: 05.10.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Mantelfläche von Zylindern**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**

Mathematik
M4.10.10

Lernschritt

Mantelfläche von Zylindern

Bezug zu Teilkompetenzen

M4.10.10

Ich kann die Formel zur Berechnung des Mantelflächeninhalts eines Zylinders herleiten.

M4.10.08

Ich kann aus einem Zylindermodell oder Zylindernetz Maße entnehmen und den Inhalt der Mantelfläche und der Oberfläche des Zylinders bestimmen.

M4.10.09

Ich kann den Oberflächeninhalt von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.

Mantel- und Oberflächenformel für Zylinder

Das Netz eines Zylinders besteht aus drei Teilflächen: Deckfläche, Mantelfläche und Grundfläche.

Aufgabe 1

Nimm dir eine zylinderförmige Dose mit einer Papier-Banderole.

- ☞ Skizziere das Netz der Dose.
- ☞ Benenne die Form der drei Teilflächen.
- ☞ Miss den Durchmesser oder den Radius der Dose und trage beide Maße in deine Skizze ein.

- ☞ Löse vorsichtig die Banderole.

Die Banderole entspricht in etwa der Mantefläche der Dose.

- ☞ Miss die beiden Seitenlängen der Banderole und trage die Maße in deine Skizze ein.
- ☞ Berechne den Flächeninhalt der Banderole.

Aufgabe 2

Um allgemein den Flächeninhalt der Mantelfläche zu berechnen, kannst du eine Formel aufstellen. Gehe dabei schrittweise vor:

- ☞ Fülle die Lücken aus.

Die Höhe der Mantelfläche entspricht der ______________ der Dose.

Die Breite der Mantelfläche entspricht dem ___________________ der Dose

und somit auch dem __________________ der Grund- bzw. Deckfläche.

Da die Banderole ein __________________ ist, berechnet man den

Flächeninhalt so: A = _________________________.

Die Banderole einer Dose mit Höhe 10 cm und Umfang 12 cm hat einen

Flächeninhalt von ____________________ cm^2.

Die Banderole einer Dose mit Höhe 12 cm und *Radius* 4 cm hat einen

Flächeninhalt von ____________________ cm^2.

Bei einem Zylinder mit der Höhe h und dem Radius r kann man den Inhalt der

Mantelfläche mit folgender Formel berechnen: M = _____________.

Aufgabe 3

Um den Oberflächeninhalt zu berechnen, musst du zur Mantelfläche noch den Inhalt der Grund- und Deckfläche addieren.

☞ Berechne den Oberflächeninhalt deiner Dose. Fülle dazu die Tabelle aus.

Teilfläche	**Flächeninhalt in cm^2**
Grundfläche	
Deckfläche	
Mantelfläche	
Oberfläche	

Stelle nun schrittweise eine Formel für die Berechnung des Oberflächeninhalts eines Zylinders auf.

☞ Notiere die Formel zur Berechnung der Grundfläche.

Formel: ____________________________

☞ Notiere die Formel zur Berechnung der Deckfläche.

Formel: ____________________________

☞ Notiere deine Formel zur Berechnung der Mantelfläche

Formel: ____________________________

☞ Trage nun alle Formeln ein und vereinfache die Gleichung durch Zusammenfassen.

$O_{Zylinder} = A_{Grundfläche} + A_{Deckfläche} + A_{Mantel}$

$O_{Zylinder} =$ ________________ + __________________ + __________________

$O_{Zylinder} =$ ____________________________________

☞ Vergleiche mit der Lösung. Hast du richtig vereinfacht?

Aufgabe 4

☞ Wende deine Formeln aus Aufgabe 2 und 3 an, um jeweils den Inhalt der Mantelfläche und der Oberfläche zu berechnen.

a) r = 3,5 cm h = 8,5 cm

b) d = 8,8 cm h = 9,5 cm

c) r = 1,7 cm h = 58 mm

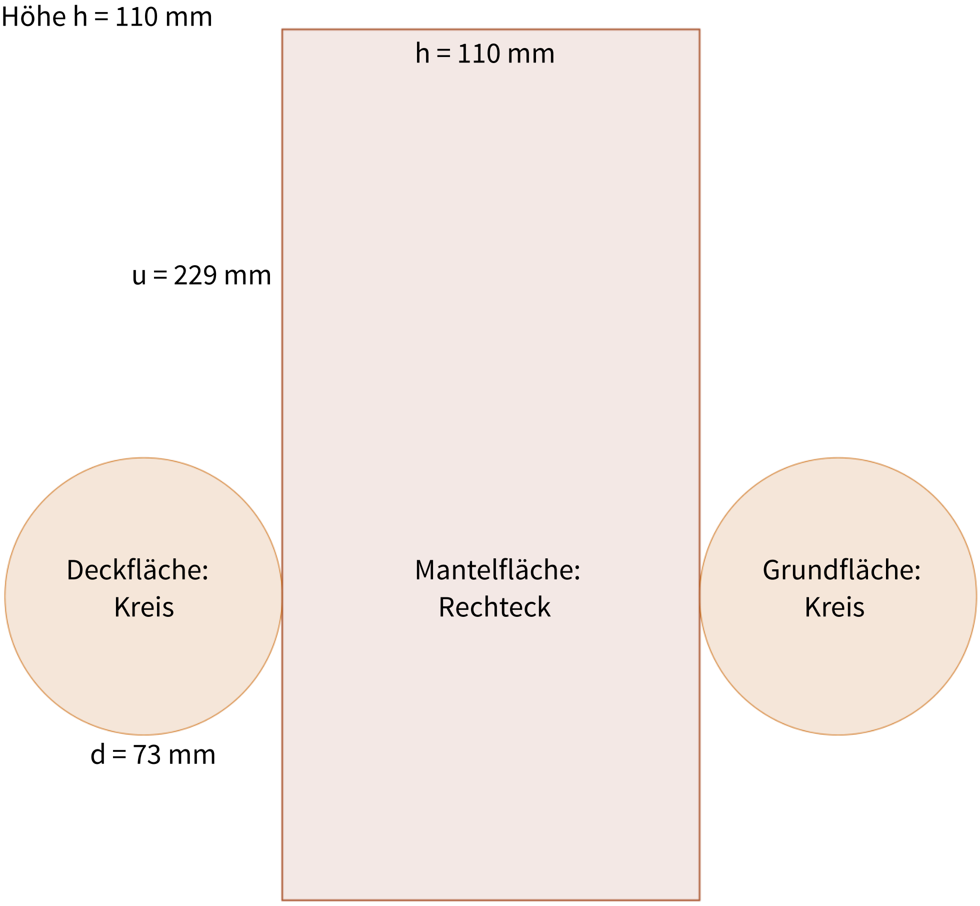
Autoren:
Christine Fürch
Andreas von Scholz
Datum: 18.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	Mathematik
4 Messen	**LFS 10**	**Mantelfläche von Zylindern**	**M4.10.10**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**			**Lösung**

Aufgabe 1

Individuelle Lösungen, z. B.

Zylinder-Netz (hier im Maßstab 1:2)
einer Standard-Konservendose mit den Maßen
Durchmesser d = 73 mm, Radius r = 36,5 mm,
Umfang u = 73 mm $\cdot \pi \approx$ 229 mm,
Höhe h = 110 mm



Flächeninhalt der Banderole: A = 22,9 cm $\cdot$ 11 cm = 251,9 cm^2

Aufgabe 2

Die Höhe der Mantelfläche entspricht der ______**Höhe**_____ der Dose.

Die Breite der Mantelfläche entspricht dem _______**Umfang**_______ der Dose

und somit auch dem _______**Umfang**_______ der Grund- bzw. Deckfläche.

Da die Banderole ein **Rechteck** ist, berechnet man den

Flächeninhalt so: A = **Länge mal Breite** *bzw. hier:* **Höhe mal Umfang**.

Die Banderole einer Dose mit Höhe 10 cm und Umfang 12 cm hat einen

Flächeninhalt von 10 cm ·12 cm = **120** cm^2.

Die Banderole einer Dose mit Höhe 12 cm und *Radius* 4 cm hat einen

Flächeninhalt von $12\text{ cm} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 4\text{ cm} \approx$ **302** cm^2.

Bei einem Zylinder mit der Höhe h und dem Radius r kann man den Inhalt der

Mantelfläche mit folgender Formel berechnen: M = $\mathbf{h \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}$.

Aufgabe 3

Individuelle Lösungen, z. B.

Teilfläche	**Flächeninhalt in cm^2**
Grundfläche	41,9 cm^2
Deckfläche	41,9 cm^2
Mantelfläche	251,9 cm^2
Oberfläche	335,7 cm^2

Formel zur Berechnung der Grundfläche: $\boldsymbol{\pi \cdot r^2}$

Formel zur Berechnung der Deckfläche: $\boldsymbol{\pi \cdot r^2}$

Formel zur Berechnung der Mantelfläche: $\mathbf{h \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}$

$O_{Zylinder} = A_{Grundfläche} + A_{Deckfläche} + A_{Mantel}$

$O_{Zylinder} = \boldsymbol{\pi \cdot r^2} + \boldsymbol{\pi \cdot r^2} + \mathbf{h \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}$

$O_{Zylinder} = \mathbf{2\,\pi \cdot r \cdot (r + h)}$

Aufgabe 4

a) $M \approx 186{,}92\text{ cm}^2$ $O \approx 263{,}89\text{ cm}^2$

b) $M \approx 262{,}64\text{ cm}^2$ $O \approx 384{,}28\text{ cm}^2$

c) $M \approx 61{,}95\text{ cm}^2$ $O \approx 80{,}11\text{ cm}^2$

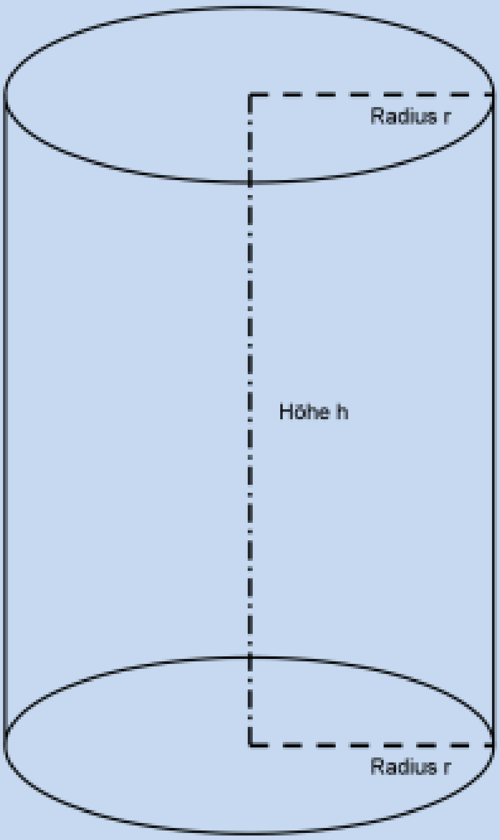
Autoren:
Christine Fürch
Andreas von Scholz
Datum: 18.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Volumen von Zylindern**
Kompetenz - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**		

Mathematik
M4.10.11

Lernschritt

Zylindervolumen berechnen



Formel für das Volumen eines Zylinders:

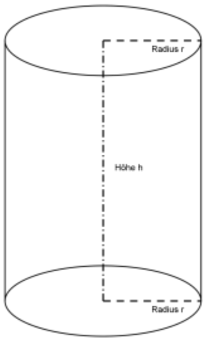
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Bezug zu Teilkompetenzen

M4.10.11

Ich kann das Volumen von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.

Zylindervolumen berechnen



Um das Volumen eines Zylinders zu berechnen, gehst du genau so vor wie bei Quadern oder Prismen:
Du multiplizierst den Inhalt der Grundfläche des Zylinders mit seiner Höhe. Den Inhalt der kreisförmigen Grundfläche erhält man mit der Formel $G = \pi \cdot r^2$.

Für das Volumen eines Zylinders mit Radius r und Höhe h gilt also:

$$\mathbf{V = \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

Zur Erinnerung:
V_{Quader} =
Länge · *Breite* · Höhe
V_{Prisma} =
Grundfläche · Höhe

Beispiele:

a) Ein Zylinder der *Höhe 20 cm* mit dem *Radius 4 cm* hat ein Volumen von ca. 1005 cm^3, denn
$V = \pi \cdot (4\ cm)^2 \cdot 20\ cm \approx 1005{,}31\ cm^3$.

b) Grob überschlagen hat ein Zylinder der *Höhe 10 cm* mit dem *Radius 5 cm* ein Volumen von 750 cm^3, denn
$V \approx \mathbf{3} \cdot (5\ cm)^2 \cdot 10\ cm = 3 \cdot 25\ cm^2 \cdot 10\ cm = 750\ cm^3$.

c) Ein Zylinder der *Höhe 60 cm* mit dem *Durchmesser 40 cm* hat ein Volumen von 75400 cm^3, denn
$V = \pi \cdot (20\ cm)^2 \cdot 60\ cm \approx 75398{,}22\ cm^3$.

d) Ein Zylinder der *Höhe 14 cm* mit dem *Radius 4 mm* hat ein Volumen von ca. 7040 mm^3, denn
$V = \pi \cdot (4\ mm)^2 \cdot 140\ mm \approx 7037{,}17\ mm^3$.

Setze in der Formel für **r** den Radius und für **h** die Höhe des Zylinders ein.

Um das Volumen überschlagsmäßig im Kopf zu berechnen, rechnest du mit **3 als Näherungswert für π.**

Ist der **Durchmesser** des Zylinders gegeben, so musst du diesen zuerst halbieren, um den Radius zu erhalten.

Achte darauf, dass du beide **Längenangaben in derselben Einheit** verwendest.

Aufgabe 1

☞ Überschlage das Volumen des Zylinders. Berechne im Kopf.

a) Höhe: 10 cm, Radius: 1 cm
b) Höhe: 1 m, Radius: 2 cm
c) Höhe: 20 cm, Durchmesser: 20 cm
d) Höhe: 20 cm, Durchmesser: 3 cm

Aufgabe 2

☞ Berechne jeweils das Volumen des Zylinders.

a) Höhe: 25 cm, Radius: 4 cm
b) Höhe: 3 m, Radius: 60 cm
c) Höhe: 18 cm, Radius: 74 mm
d) Höhe: 2,16 m, Radius: 8 cm
e) Höhe: 90 cm, Durchmesser: 30 cm
f) Höhe: 17 cm, Durchmesser: 48 mm
g) Höhe: 38 cm, Durchmesser: 9 cm
h) Höhe: 12,3 cm, Durchmesser: 38 mm

Berechne mit dem Taschenrechner. Verwende die Taste $\boxed{\pi}$ und runde dein Ergebnis.

Aufgabe 3

Ein zylinderförmiges Glas mit 12 cm Höhe hat einen Durchmesser von 62 mm. Ein anderes Glas hat einen Durchmesser von 7,2 cm und ist 8,5 cm hoch.
In welches Glas passt mehr Saft?

☞ Berechne jeweils das Volumen des Glases und vergleiche.

Aufgabe 4

Ein rundes Planschbecken hat innen einen Radius von 1,60 m. Wie viel Liter Wasser muss man hineinfüllen, damit das Becken 35 cm hoch gefüllt ist?

☞ Berechne das Füllvolumen des Planschbeckens bis zu einer Füllhöhe von 35 cm.

Aufgabe 5

Ravioli werden in zwei verschiedenen Größen von Konservendosen verkauft. Die kleine Dose hat 68 mm Durchmesser und ist 10 cm hoch, der Durchmesser der 11,5 cm hohen Dose beträgt 10 cm.
Passt in die große Dose doppelt so viel wie in die kleine?

☞ Berechne jeweils das Volumen und vergleiche.

Aufgabe 6

Suche drei verschiedene zylinderförmige Gegenstände, die du mit Wasser auffüllen kannst (z. B. eine Konservendose).

☞ Miss jeweils Höhe und Durchmesser.

☞ Berechne das Volumen.

☞ Fülle den Gegenstand mit Wasser und bestimme mit einem Messbecher das Füllvolumen.

☞ Vergleiche das errechnete und das gemessene Volumen.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 05.10.2015

Kompetenzbereich **4 Messen**	Lernfortschritt **LFS 10**	Materialien/Titel **Volumen von Zylindern**
Kompetenz - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**		

Mathematik
M4.10.11

Lösung

Aufgabe 1

a) $V \approx 3 \cdot (1\text{ cm})^2 \cdot 10\text{ cm} = \mathbf{30\ cm^3}$

b) $V \approx 3 \cdot (2\text{ cm})^2 \cdot 100\text{ cm} = \mathbf{1\,200\ cm^3 \approx 1{,}2\ l}$

c) $V \approx 3 \cdot (10\text{ cm})^2 \cdot 20\text{ cm} = \mathbf{6\,000\ cm^3 \approx 6\ l}$

d) $V \approx 3 \cdot (15\text{ mm})^2 \cdot 200\text{ mm} = \mathbf{135\,000\ mm^3 = 135\ cm^3}$

Aufgabe 2

a) $V = \pi \cdot (4\text{ cm})^2 \cdot 25\text{ cm} \approx \mathbf{1257\ cm^3 \approx 1{,}3\ l}$

b) $V = \pi \cdot (60\text{ cm})^2 \cdot 300\text{ cm} \approx \mathbf{3392920\ cm^3 \approx 3{,}4\ m^3}$

c) $V = \pi \cdot (74\text{ mm})^2 \cdot 180\text{ mm} \approx \mathbf{3096605\ mm^3 \approx 3{,}1\ l}$

d) $V = \pi \cdot (8\text{ cm})^2 \cdot 216\text{ cm} \approx \mathbf{43429\ cm^3 \approx 43{,}4\ l}$

e) $V = \pi \cdot (15\text{ cm})^2 \cdot 90\text{ cm} \approx \mathbf{63617\ cm^2 \approx 63{,}6\ l}$

f) $V = \pi \cdot (24\text{ mm})^2 \cdot 170\text{ mm} \approx \mathbf{307625\ mm^3 \approx 0{,}3\ l}$

g) $V = \pi \cdot (45\text{ mm})^2 \cdot 380\text{ mm} \approx \mathbf{2417456\ mm^3 \approx 2{,}4\ l}$

h) $V = \pi \cdot (19\text{ mm})^2 \cdot 123\text{ mm} \approx \mathbf{139496\ cm^3 \approx 0{,}14\ l}$

Aufgabe 3

$V_1 = \pi \cdot (31\text{ mm})^2 \cdot 120\text{ mm} \approx \mathbf{362288\ mm^2} \approx 362\text{ cm}^3 = \mathbf{0{,}362\ l}$
$V_2 = \pi \cdot (36\text{ mm})^2 \cdot 85\text{ mm} \approx \mathbf{346078\ mm^2} \approx 346\text{ cm}^3 = \mathbf{0{,}346\ l}$
In das höhere Glas passt mehr Saft.

Aufgabe 4

$V = \pi \cdot (16\text{ dm})^2 \cdot 3{,}5\text{ dm} \approx 2815\text{ dm}^3 = \mathbf{2815\ l}$

Aufgabe 5

$V_1 = \pi \cdot (3{,}4\text{ cm})^2 \cdot 10\text{ cm} \approx \mathbf{363{,}17\ cm^2}$
$V_2 = \pi \cdot (5\text{ cm})^2 \cdot 11{,}5\text{ cm} \approx \mathbf{903{,}21\ cm^2 >} 2 \cdot V_1 \approx 726\text{ cm}^2$
In die größere Dose passt deutlich mehr als das Doppelte.

Aufgabe 6

Individuelle Lösungen

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 05.10.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Volumenbestimmung von Zylindern**

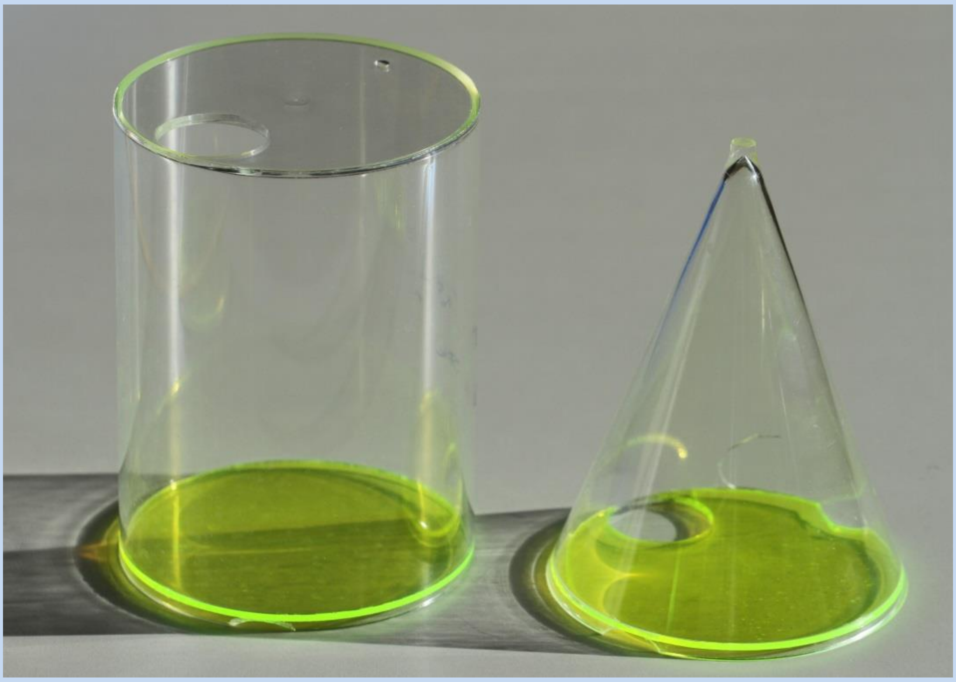
Kompetenz

- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von (Prismen und) Zylindern berechnen.**

Mathematik
M4.10.12

Lernschritt

Volumenbestimmung von Zylinder (und Kegel)



Bezug zu Teilkompetenzen

M4.10.12

Ich kann das Volumen von Zylindern bestimmen.

M4.10.14

Ich kann Volumen und Oberflächeninhalt von zylinderförmigen Gegenständen aus meiner Umwelt durch Ausmessen und Berechnen ermitteln.

M4.10.11

Ich kann das Volumen von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.

M4.10.08

Ich kann aus einem Zylindermodell Maße entnehmen und damit den Inhalt der Mantelfläche des Zylinders berechnen.

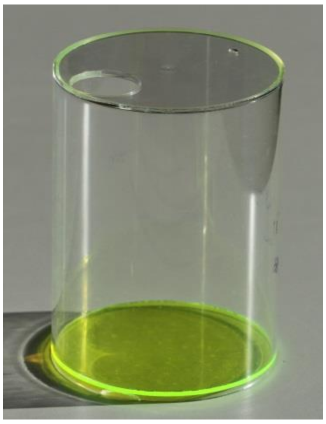
M4.10.09

Ich kann den Oberflächeninhalt von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.

Kegel:
siehe **M4.13**

Ausmessen eines Zylinders (und eines Kegels)
Bestimmen seines Volumens und seiner Oberfläche

Aufgabe 1



Was du benötigst:
- mindestens ein Füllkörpermodell eines Zylinders
- Wasser
- einen Messbecher
- ein Lineal, Maßband o. ä.

Nimm einen zylinderförmigen Füllkörper.

☞ Miss den Durchmesser und die Höhe des Zylinders und trage sie ein.

Durchmesser: ________________

Höhe: _______________________

☞ Berechne mithilfe dieser Maße das Volumen des Zylinders:

Volumen: ___________________________

☞ Fülle den Zylinder mit Wasser, so dass er bis oben gefüllt ist.

☞ Schütte das Wasser aus dem Zylinder in einen leeren Messbecher. Lies anhand der Markierung auf dem Messbecher das Füllvolumen ab.

Füllvolumen: _______________________

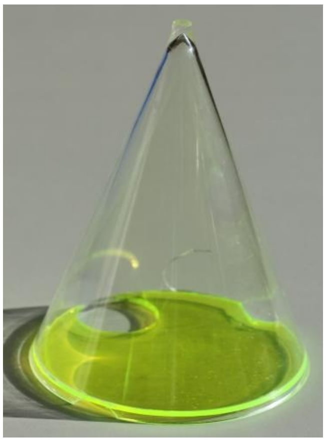
Stimmen beide Volumina überein?

☞ Erkläre eine mögliche Abweichung.

☞ Bestimme den Oberflächeninhalt des Zylinders.

Wiederhole dasselbe ggf. mit weiteren Zylindern.

Aufgabe 2



Was du benötigst:
- mindestens ein Füllkörpermodell eines Kegels
- Wasser
- einen Messbecher
- ein Lineal, Maßband o. ä.

Du kannst die Höhe auch mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnen!

Nimm einen kegelförmigen Füllkörper und führe nun dasselbe mit dem Kegel durch.

☞ Miss den Durchmesser und die Höhe des Kegels und trage sie ein.

Durchmesser: ________________

Höhe: _______________________

☞ Berechne mithilfe dieser Maße das Volumen des Kegels:

Volumen: ___________________________

☞ Fülle den Kegel mit Wasser, so dass er bis oben gefüllt ist.

☞ Miss das Füllvolumen mit Hilfe eines Messbechers.

Füllvolumen: _______________________

Stimmen beide Volumina überein?

☞ Erkläre eine mögliche Abweichung.

Wiederhole dasselbe ggf. mit weiteren Kegeln.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 16.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Volumenbestimmung von Zylindern**
Kompetenz - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von (Prismen und) Zylindern berechnen.**		

Mathematik
M4.10.12

Lösung

Aufgabe 1

Durchmesser: **10,5 cm**
Höhe: **14 cm**
Volumen: $V = \pi \cdot (10{,}5\ \text{cm} : 2)^2 \cdot 14\ \text{cm} \approx$ **1212 cm³**
Oberfläche: $O = 2 \cdot \pi \cdot 5{,}25\ \text{cm} \cdot (5{,}25\ \text{cm} + 14\ \text{cm}) \approx$ **635 cm²**

Möglicher Grund für eine **Abweichung zwischen errechnetem und gemessenem Maß**:
Für das Füllvolumen müssen die **Innen**maße der Körper gemessen und beim Berechnen verwendet werden!

Aufgabe 2

Durchmesser: **10,5 cm**
Höhe: **13 cm**
gemessen oder berechnet mit $h = \sqrt{(14\ \text{cm})^2 - (5{,}25\ \text{cm})^2} \approx 13{,}0\ \text{cm}$
Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (10{,}5\ \text{cm} : 2)^2 \cdot 13\ \text{cm} \approx$ **375 cm³**

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 16.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Wasser marsch!**

Kompetenz

- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von (Prismen und) Zylindern berechnen.**

Mathematik
M4.10

Lernthema

Wasser marsch!

Bezug zu Teilkompetenzen

M4.10.11

Ich kann das Volumen von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.

M4.10.09

Ich kann den Oberflächeninhalt von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.

Aufgabe 1

Der Füllzylinder des abgebildeten Feuerlöschers hat eine Höhe von 38 cm und einen Durchmesser von 15 cm. Er enthält ein Wasser-Schaum-Gemisch sowie ein Treibgas und steht unter hohem Druck. Bei Betätigung des Auslösers versprüht er in 18 Sekunden den gesamten Inhalt als Schaum.

a) Der Hersteller gibt an, dass das Füllvolumen 6 l beträgt. Überprüfe die Angabe.

☞ Berechne das Volumen. Erkläre eine mögliche Abweichung.

b) Beim Versprühen dehnt sich das Volumen des Schaums auf das 170-Fache aus.

☞ Berechne, wie viele große Fässer mit 50 cm Durchmesser und 80 cm Höhe man mit dem Schaum aus einem solchen Feuerlöscher füllen könnte.

c) Die Feuerwehr verwendet bei der Brandbekämpfung meist Druckschläuche mit einem Durchmesser von 75 mm und einer Länge von 20 m. Bei einem schwer zugänglichen Brand in der Altstadt muss eine Schlauchverbindung aus 12 Einzelschläuchen gelegt werden.

☞ Berechne, wie lange es dauert, bis nach dem Anschließen einer Pumpe mit einer Leistung von 800 l/min am vorderen Ende das Löschwasser aus dem Schlauch kommt.

Aufgabe 2

Der Druck in Wasserleitungen wird durch Wasserhochbehälter und Wassertürme erzeugt. Der abgebildete Wasserturm hat eine Höhe von 31 Metern.

a) Der Turm ist nicht ganz mit Wasser gefüllt. Er enthält 500 m^3 Wasser.

☞ Berechne den Anteil des Turminnern, der mit Wasser gefüllt ist.

b) Die Fassade des Turms muss saniert werden. Als Quadratmeterpreis werden 65 € veranschlagt. Zusätzlich muss der Turm eingerüstet werden. Das Unternehmen nennt im Angebot einen Mietpreis pro laufenden Meter Gerüstboden von 6,50 €.

☞ Berechne die Kosten für die Sanierung der Fassade einschließlich Gerüstmiete.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 07.12.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Wasser marsch!**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von (Prismen und) Zylindern berechnen.**		

Mathematik
M4.10

Lösung

Aufgabe 1

a) Volumen des Füllzylinders:
$V = \pi \cdot (15\text{ cm} : 2)^2 \cdot 38\text{ cm} \approx$ **$6715\text{ cm}^3 = 6{,}715\text{ l}$**
Das angegebene Volumen ist um ca. 0,7 l geringer.
Mögliche Erklärung: Da der Behälter unter hohem Druck steht, ist die Außenwand recht dick (etwa 2 mm). Zudem sind die obere und untere Abdeckung des Zylinders zu den Seiten hin abgerundet. Hierdurch ist das Innenvolumen deutlich kleiner.

Volumen eines Zylinders: M4.10.11

b) Schaumvolumen: $6\text{ l} \cdot 170 = 1020\text{ l}$
Volumen eines Fasses: $V = \pi \cdot (50\text{ cm} : 2)^2 \cdot 80\text{ cm} \approx 157100\text{ cm}^3 = 157{,}1\text{ l}$
Zu befüllende Fässer:
$1020\text{ l} : 157{,}1\text{ l} \approx 6{,}5$
Es könnten **etwa sechseinhalb Fässer** mit dem Schaum gefüllt werden.

c) Volumen der Wasserleitung aus 120 Schläuchen:
$V = \pi \cdot (0{,}375\text{ dm})^2 \cdot 2400\text{ dm} \approx 1060\text{ dm}^3 = 1060\text{ l}$
Befülldauer:
$1060 : 800 = 1{,}325$.
Nach 1,325 Minuten ist das Wasser in den Schlauch gepumpt. Anschließend, also **nach ca. 1 min 20 s, kommt Löschwasser aus dem Schlauchende**.

Aufgabe 2

a) Höhe: In der Abbildung 62 mm – in der Realität 31 m
Durchmesser: In der Abbildung 22 mm – in der Realität 11 m
Volumen des Wasserturms:
$V = \pi \cdot (11\text{ m} : 2)^2 \cdot 31\text{ m} \approx$ **2946 m^3**
(Für das Innenvolumen wäre noch das Volumen der Außenmauer abzuziehen.)
Anteil des Wassers:
$500 : 2946 \approx 0{,}170$
Das Wasser hat einen Anteil von ca. 17 % am Turmvolumen.

Zum maßstäblichen Rechnen siehe M6.01

Volumen eines Zylinders: M4.10.11

b) Mantelfläche: $V = \pi \cdot 11\text{ m} \cdot 31\text{ m} \approx$ **1071 m^2**
Kosten für die Fassade: $1071 \cdot 65\text{ €} =$ **69615 €**
Laufende Gerüstmeter in 15 Geschossen: $\pi \cdot 11\text{ m} \cdot 15 \approx$ **518 m**
Kosten für Gerüstmiete: $518 \cdot 6{,}50\text{ €} =$ **3367 €**
Die **Gesamtkosten** betragen **knapp 73 000 €.**

Oberfläche eines Zylinders: M4.10.09

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 07.12.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Ressourcen schonen**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von (Prismen und) Zylindern berechnen.**

Mathematik
M4.10

Lernthema

Ressourcen schonen

Bezug zu Teilkompetenzen

M4.10.11

Ich kann das Volumen von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.

M4.10.13

Ich kann die Formel für das Volumen eines Zylinders nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.

Aufgabe 1

Um im Garten zu gießen oder Gartenwerkzeuge zu säubern, empfiehlt es sich, Regenwasser zu verwenden, das man in Regentonnen sammelt. Das schont die Umwelt und spart Kosten.

a) Wie viel Liter Wasser passen in eine Regentonne, die 90 cm hoch ist und einen Durchmesser von 60 cm hat?

☞ Berechne das Volumen der Tonne.

b) Wenn man den Gartenschlauch abmontiert, läuft das restliche Wasser, das sich noch darin befindet, heraus. Johannes meint: „Es ist sinnvoll das Wasser in ein Gefäß auszulassen, wenn man den Schlauch abmacht, um es dann noch zu verwenden.“ Was meinst du dazu?

☞ Berechne, wie viel Wasser sich in einem 25 m langen Schlauch mit einem Innendurchmesser von 1,4 cm befindet.

c) Bei einem 8,50 m langen und 7,00 m breiten Einfamilienhaus soll das Regenwasser, das auf das Dach fällt über die Dachrinne und die Regenrohre in zwei gleiche Regentonnen gesammelt werden.

Bei einem stärkeren Regen fallen pro m^2 30 Liter Regen. Welche Maße müssten die Regentonnen haben, damit das ganze Regenwasser in den beiden Tonnen aufgefangen und anschließend verwendet werden kann?

☞ Berechne die erforderliche Höhe, wenn die Tonnen einen Durchmesser von 80 cm haben.

☞ Berechne den erforderlichen Durchmesser, wenn die Tonnen maximal 1,20 m hoch sein sollen.

☞ Berechne, wie viel Geld man durch das Auffangen von Regenwasser mithilfe der Wassertonnen bei einem solchen Regen sparen kann.

Informiere dich über den Wasserpreis.

Aufgabe 2

Viele Abfalleimer haben eine solche zylindrische Form. Lotta meint, man müsse Tetrapaks unbedingt plattdrücken, bevor man sie in den Müll wirft. Ist das wirklich so wichtig? Was meinst du?

☞ Berechne wie viele Tetrapaks in ihrer eigentlichen Form mit 105 mm Länge, 67 mm Breite und 163 mm Höhe maximal in einen zylinderförmigen Abfalleimer mit 40 cm Durchmesser und 90 cm Höhe passen.

Das Material, aus dem Tetrapaks hergestellt werden, hat eine Dicke von ca. 1,5 mm.

☞ Berechne die Anzahl der Tetrapaks, die man in dem Abfalleimer unterbringen kann, wenn man sie vorher platt zusammendrückt.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 23.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	Mathematik M4.10
4 Messen	**LFS 10**	**Ressourcen schonen**	**Lösung**
Kompetenz - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von (Prismen und) Zylindern berechnen.**			

Aufgabe 1

a) Volumen der Regentonne:

$V = \pi \cdot (90\text{ cm} : 2)^2 \cdot 90\text{ cm} \approx 254469\text{ cm}^3 \approx \mathbf{254\ l}$

a) Volumen des Gartenschlauchs:

$V = \pi \cdot (14\text{ mm} : 2)^2 \cdot 25000\text{ mm} \approx 3848451\text{ mm}^3 \approx \mathbf{3{,}85\ l}$

Zylindervolumen: M4.10.11

b) Fläche, die überdacht ist:

$A = 7\text{ m} \cdot 8{,}5\text{ m} = 59{,}5\text{ m}^2$

Gesamte Regenmenge, die auf das Hausdach fällt: $V_R = 59{,}5 \cdot 30 = 1785\ l$

Erforderliches Volumen pro Regentonne: $V_T = 1785\ l : 2 = 892{,}5\ l$

Grundfläche bei 80 cm Durchmesser:

$G = \pi \cdot (80\text{ cm} : 2)^2 \approx 5027\text{ cm}^2$

Erforderliche Höhe: $h = V : G = 892500\text{ cm}^3 : 5027\text{ cm}^2 \approx \mathbf{178\ cm}$

Die **Höhe** der Regentonnen müsste etwa **178 cm** betragen.

Erforderliche Grundfläche bei 120 cm Höhe:

$G = V : h = 892500\text{ cm}^3 : 120\text{ cm} = 7437{,}5\text{ cm}^2$

Aus $7437{,}5\text{ cm}^2 = \pi \cdot r^2$ erhält man durch Rückwärtsrechnen

$r^2 = 7437{,}5\text{ cm}^2 : \pi \approx 2367\text{ cm}^2$ und

$r = \sqrt{2367\text{ cm}^2} \approx 49\text{ cm}$

Der **Durchmesser** der Regentonnen müsste $2 \cdot 49\text{ cm} =$ **98 cm** betragen.

Bei einem Kubikmeterpreis von 2,50 € könnte man $1{,}785\text{ m}^3 \cdot 2{,}5\,\frac{€}{\text{m}^3} \approx 4{,}46$ € sparen.

Aufgabe 2

Volumen des Abfalleimers:

$V_A = \pi \cdot (40\text{ cm} : 2)^2 \cdot 90\text{ cm} \approx 113097\text{ cm}^3 \approx \mathbf{113\ l}$

Volumen eines Tetrapaks (außen):

$V_T = 105\text{ mm} \cdot 67\text{ mm} \cdot 163\text{ mm} = 1146705\text{ mm}^3 \approx \mathbf{1{,}15\ l}$

Würde **kein ungenutzter Leerraum** zwischen den Tetrapaks und am Rand des Abfalleimers bleiben, so würden theoretisch 113 l : 1,15 l ≈ **98 Tetrapaks in einen solchen Abfalleimer passen.**

Tatsächlich wird man wegen der Lücken, die dazwischen bleiben, höchstens 80 Stück darin unterbringen.

Volumen der zusammengedrückten Verpackungen:

Oberfläche eines Tetrapaks:

$O_T = 2 \cdot 105\text{ mm} \cdot 67\text{ mm} + 2 \cdot 105\text{ mm} \cdot 163\text{ mm} + 2 \cdot 67\text{ mm} \cdot 163\text{ mm}$

$= 70142\text{ mm}^2 \approx 700\text{ cm}^2$

Volumen des Materials: $V_M = 700\text{ cm}^2 \cdot 0{,}15\text{ cm} = 105\text{ cm}^3 = 0{,}105\ l$

Würde durch das Zusammendrücken die **ganze Luft herausgepresst** und die Tetrapaks könnten **ohne Leerraum** in den Abfalleimer geschichtet werden, so würden 113 l : 0,105 l ≈ **1076 Tetrapaks** in einen Abfalleimer passen.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 23.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Schwimmen (ME)**

Kompetenz

- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von (Prismen und) Zylindern berechnen.**

Mathematik M4.10

Lernthema

Schwimmen

Bezug zu Teilkompetenzen

M4.10.11

Ich kann das Volumen von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.

M4.10.13

Ich kann die Formel für das Volumen eines Zylinders nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.

Aufgabe 1

Solche Poolnudeln werden als Schwimmhilfen verwendet, da sie durch ihren Auftrieb im Wasser den Schwimmer unterstützen.

Dies funktioniert so:
Wird Wasser durch einen leichteren Gegenstand verdrängt, so erhält dieser Gegenstand im Wasser Auftrieb. Der Auftrieb hängt davon ab, wie groß die Differenz zwischen der Masse des verdrängten Wassers und der Masse des Körpers ist.
Du kannst dies ausprobieren, indem Du eine Poolnudel unter Wasser drückst. Je mehr sich unter Wasser befindet und je mehr Wasser damit also verdrängt wird, desto größer ist die Auftriebskraft.
Eine herkömmliche Poolnudel hat 7 cm Durchmesser und ist 160 cm lang. Sie wiegt 200 g.

a) Wenn man ein großes Holzbrett auf eine ausreichende Anzahl von Poolnudeln stellt, so kann man darauf stehen, ohne dass man untergeht.

   ☞ Ermittle, wie viele Poolnudeln man benötigt, damit ein 13 kg schweres Holzbrett mit dir darauf von den Poolnudeln über Wasser gehalten wird.

Berechne zunächst das Volumen und den Auftrieb einer Poolnudel.

b) Wie viele Poolnudeln braucht man um ein 1 t schweres Auto auf einer 125 kg schweren Platte schwimmen zu lassen?

   ☞ Berechne die Anzahl der benötigten Poolnudeln.

Aufgabe 2

Eine zylinderförmige Tonne (Höhe 1,20 m, Durchmesser 50 cm, Gewicht 10 kg) soll zum Schwimmen gebracht werden. Damit sie im Wasser nicht umkippt, wird sie zum Teil mit Beton gefüllt.

a) Der verwendete Beton hat eine Dichte von 2 g pro cm^3. Es soll 20 cm hoch Beton in die Tonne eingefüllt werden.

   ☞ Berechne, wie tief die Tonne im Wasser eintauchen würde.

Als Dichte (oder auch: Massendichte) eines Stoffs bezeichnet man den Quotient aus Masse durch Volumen. Je größer die Dichte, desto „schwerer" ist der Stoff.

b) Eine Person stellt sich in eine so vorbereitete Tonne. Durch das steigende Gewicht sinkt die Tonne weiter, so dass nur noch 40 cm aus dem Wasser heraus schauen.

   ☞ Berechne das Gewicht der Person.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 11.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Schwimmen (ME)**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von (Prismen und) Zylindern berechnen.**		

Mathematik M4.10

Lösung

Aufgabe 1

a) Volumen einer Poolnudel:

$V = \pi \cdot (7\text{ cm} : 2)^2 \cdot 160\text{ cm} \approx \mathbf{6158\text{ cm}^3}$

Der **Auftrieb entspricht** der Differenz zwischen der Masse des verdrängten Wassers und der Masse der Poolnudel:

$a = 6{,}158\text{ kg} - 200\text{ g} = \mathbf{5{,}958\text{ kg}}$

Angenommenes Körpergewicht: 52 kg
Gesamtgewicht Körper und Brett: 65 kg
Benötigte Poolnudeln: $65\text{ kg} : 5{,}958\text{ kg} \approx 10{,}9 \approx 11$
Bei 52 kg Körpergewicht benötigt man **11 Poolnudeln**, um mit dem Brett über Wasser gehalten zu werden.

Volumen von Zylindern: M4.10.11

b) Gesamtgewicht Auto und Platte: 1125 kg
Benötigte Poolnudeln: $1125\text{ kg} : 5{,}958\text{ kg} \approx 188{,}8 \approx 189$.
Für das Auto auf der Platte benötigt man **189 Poolnudeln**.

Aufgabe 2

a) Betonvolumen: $V = \pi \cdot (25\text{ cm})^2 \cdot 20\text{ cm} \approx 39270\text{ cm}^3 \approx 39{,}3\text{ l}$
Gewicht der gefüllten Tonne: $10\text{ kg} + 39{,}3 \cdot 2\text{ kg} = 88{,}4\text{ kg}$
Damit die Tonne schwimmt, muss (für den entsprechenden Auftrieb) $88{,}4\text{ l} = 88400\text{ cm}^3$ Wasser verdrängt werden.
Mit der Eintauchtiefe *t* cm gilt also: $\pi \cdot (25\text{ cm})^2 \cdot t\text{ cm} = 88400\text{ cm}^3$ oder
$t = 88400 : \pi : 625 \approx 45{,}0$
Die Tonne würde **etwa 45 cm tief** eintauchen.

b) Das verdrängte Wasser hat ein Volumen von
$V = \pi \cdot (25\text{ cm})^2 \cdot 80\text{ cm} \approx 157080\text{ cm}^3 \approx 157{,}1\text{ l}$.
Der Auftrieb entspricht daher 157,1 kg.
Wegen 88,4 kg Gesamtgewicht der gefüllten Tonne erhält man als Körpergewicht der Person $157{,}1\text{ kg} - 88{,}4\text{ kg} = \mathbf{68{,}7\text{ kg}}$.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 11.01.2016

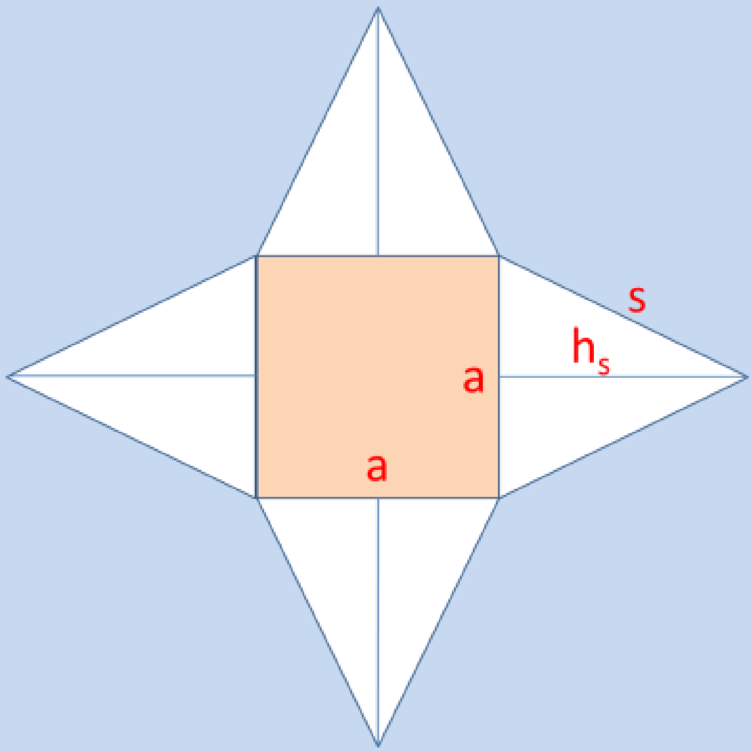
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 11**	**Oberflächeninhalt von Pyramiden**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**

Mathematik
M4.11.02

Lernschritt

Inhalt der Pyramiden-oberfläche berechnen



Bezug zu Teilkompetenzen

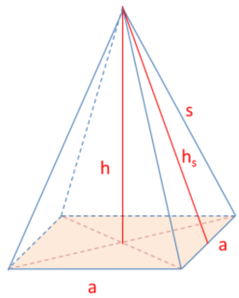
M4.11.02

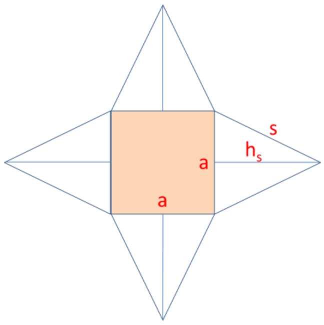
Ich kann anhand von Grundkantenlänge und Seitenhöhe den Oberflächeninhalt einer quadratischen Pyramide berechnen.

Oberflächeninhalt einer quadratischen Pyramide berechnen

Um den Oberflächeninhalt einer Pyramide mit Grundkantenlänge a und Seitenhöhe h_s zu berechnen, zerlegt man diese in zwei Teile:

- eine **Grundfläche G**. Sie besteht aus einem Quadrat mit der Seitenlänge a.
- ein **Mantel M**. Er besteht aus vier gleichschenkligen Dreiecken mit der Grundkantenlänge a und der Seitenhöhe h_s.





Addiert man die Inhalte der Grund- und Mantelfläche, so erhält man

$$O = G + M$$
$$O = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$$

Zur Erinnerung:
$A_{Quadrat}$ = Länge · Länge
$A_{Dreieck}$ = $\frac{1}{2}$ Grundseite · Höhe

Für den **Oberflächeninhalt einer quadratischen Pyramide mit Grundkante a und Seitenhöhe h_s** gilt:

$$\mathbf{O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s}$$

Beispiele:

1. Eine quadratische Pyramide mit der Grundkante a = 7,0 cm und der Seitenhöhe h_s = 9,0 cm hat einen Oberflächeninhalt von 175 cm^2, denn

   $O = (7{,}0\text{ cm})^2 + 2 \cdot 7{,}0\text{ cm} \cdot 9{,}0\text{ cm} = 175\text{ cm}^2$
2. Eine quadratische Pyramide mit der Grundkante a = 5 dm und der Seitenhöhe h_s = 85 cm hat einen Oberflächeninhalt von 11000 cm^2, denn

   $O = (50\text{ cm})^2 + 2 \cdot 50\text{ cm} \cdot 85\text{ cm} = 11000\text{ cm}^2$

Setze in die Formel für a die Länge der Grundkante und für h_s die Länge der Seitenhöhe ein.

Achte darauf, dass du beide Längenangaben in derselben Einheit verwendest.

Aufgabe 1

☞ Berechne die Mantelfläche M und den Oberflächeninhalt O der quadratischen Pyramide mit:

a) a = 3 cm und h_s = 5 cm,

b) a = 4 cm und h_s = 7 cm,

c) a = 20 cm und h_s = 30 cm.

Aufgabe 2

Das pyramidenförmige Dach eines Kirchturms soll mit Ziegeln neu eingedeckt werden. Die Grundkante hat eine Länge von 4,20 m, die Seitenhöhe beträgt 6,80 m. Wieviel m^2 Ziegel müssen für das Dach bestellt werden?

☞ Berechne die Größe der einzudeckenden Fläche.

Aufgabe 3

Im Stadtzentrum von Karlsruhe befindet sich das Grabmal vom Stadtgründer Markgraf Karl Wilhelm in Form einer Pyramide. Die Grundkante hat eine Länge von mit 6,05 m. Die Seitenhöhe beträgt 7,45 m.

☞ Berechne die Größe der sichtbaren Oberfläche.

Autor: Alexander Hermann
Datum: 15.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	Mathematik
4 Messen	**LFS 11**	**Oberflächeninhalt von Pyramiden**	**M4.11.02**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**			**Lösung**

Aufgabe 1

a) $O_{Pyramide} = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s$
$O_{Pyramide} = (3\text{ cm})^2 + 2 \cdot 3\text{ cm} \cdot 5\text{ cm}$
$O_{Pyramide} = 39\text{ cm}^2$

b) $O_{Pyramide} = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s$
$O_{Pyramide} = (4\text{ cm})^2 + 2 \cdot 4\text{ cm} \cdot 7\text{ cm}$
$O_{Pyramide} = 72\text{ cm}^2$

c) $O_{Pyramide} = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s$
$O_{Pyramide} = (20\text{ cm}^2) + 2 \cdot 20\text{ cm} \cdot 30\text{ cm}$
$O_{Pyramide} = 1600\text{ cm}^2$

Aufgabe 2

$M_{Pyramide} = 2 \cdot a \cdot h_s$
$M_{Pyramide} = 2 \cdot 4{,}20\text{ m} \cdot 6{,}80\text{ m}$
$M_{Pyramide} = 57{,}12\text{ m}^2$

Für das Dach müssen 57,12 m^2 Ziegel bestellt werden.

Aufgabe 3

$M_{Pyramide} = 2 \cdot a \cdot h_s$
$M_{Pyramide} = 2 \cdot 6{,}05\text{ m} \cdot 7{,}45\text{ m}$
$M_{Pyramide} \approx 90{,}15\text{ m}^2$

Das Grabmal hat eine sichtbare Oberfläche von 90,15 m^2.

Autor: Alexander Hermann
Datum: 15.01.2016

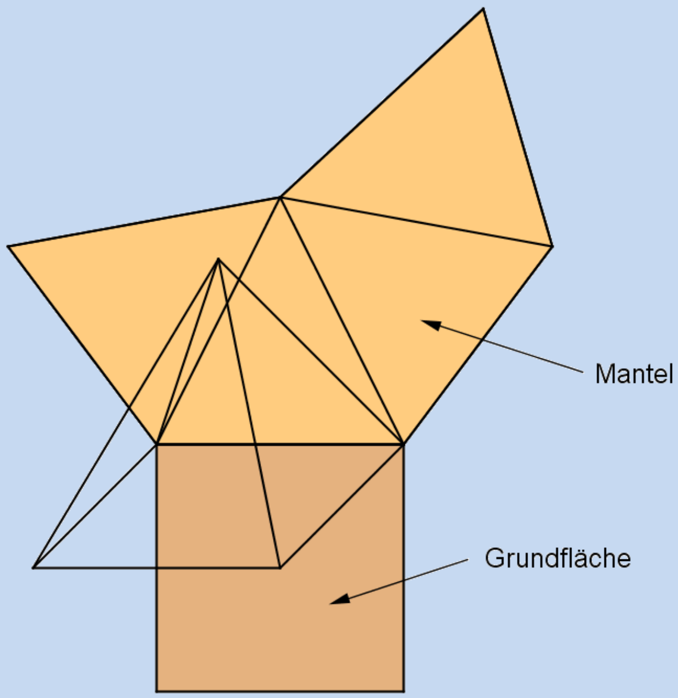
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 11**	**Oberflächenformel Pyramide**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**

Mathematik
M4.11.01

Lernschritt

Herleitung der Oberflächenformel für Pyramiden



Bezug zu Teilkompetenzen

M4.11.01

Ich kann zu einer quadratischen Pyramide das Netz skizzieren, es mit Maßen beschriften und über die Teilflächen den Inhalt der Mantelfläche sowie der gesamten Oberfläche der Pyramide bestimmen.

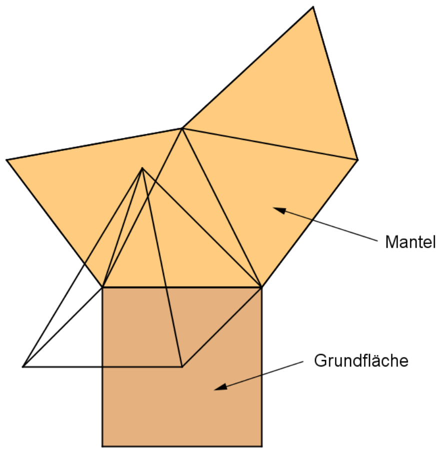
M4.11.11

Ich kann den Oberflächeninhalt von nicht-quadratischen Pyramiden berechnen.

Formel für die Oberfläche einer Pyramide herleiten

Eine **Pyramide** wird von einem Vieleck, der sogenannten Grundfläche, und von mehreren Dreiecken begrenzt, die alle **einen** Punkt, die **Spitze der Pyramide**, gemeinsam haben.

Hat eine Pyramide ein Dreieck (Viereck, Fünfeck, ...) als Grundfläche, dann hat sie drei (vier, fünf, ...) Seitenflächen. Deshalb wird sie auch als dreiseitige (vierseitige, fünfseitige, ...) Pyramide bezeichnet.



Eine Pyramide ist von ebenen Flächen begrenzt. In der Ebene ausgebreitet ergeben diese Flächen das **Netz der Pyramide**.

Für die **Oberfläche O einer Pyramide** mit der Grundfläche G und der Mantelfläche M gilt:

Oberfläche =
Grundfläche + Mantelfläche

$$O = G + M$$

Aufgabe 1

☞ Zeichne das Netz einer quadratischen Pyramide und bestimme anhand der mit Maßen versehenen Zeichnung Inhalt von Grundfläche und Mantelfläche.

Aufgabe 2

Eine quadratische Pyramide hat eine Grundkante a mit der Länge 5 cm und eine Seitenhöhe h_s mit der Länge 6 cm.

☞ Zeichne das Netz der Pyramide und berechne den Oberflächeninhalt.

Aufgabe 3

Für die **Oberfläche einer quadratischen Pyramide** gilt folgende Formel:

$$O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s$$

☞ Zeige, dass die Formel gilt.

Aufgabe 4

Eine dreiseitige Pyramide hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit Grundkantenlänge a = 5 cm und sowie eine Seitenhöhe h_s der Länge 6 cm.

Zur Erinnerung:
$A_{\text{gleichseitiges Dreieck}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

☞ Zeichne das Netz und berechne die Oberfläche der Pyramide.

Aufgabe 5

Für die **Oberfläche einer dreiseitigen Pyramide** gilt folgende Formel:

$$O = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} + \frac{3}{2} \cdot a \cdot h_s$$

☞ Zeige, dass die Formel gilt.

Autor: Alexander Hermann
Datum: 15.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	
4 Messen	**LFS 11**	**Oberflächenformel Pyramide**	**Mathematik M4.11.01**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**			**Lösung**

Aufgabe 1

Individuelle Zeichnung und Oberfläche

Aufgabe 2

$$O = G + M$$
$$O = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$$
$$O = (5\ \mathrm{cm})^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\ \mathrm{cm} \cdot 6\ \mathrm{cm}$$
$$O = 85\ \mathrm{cm}^2$$

Aufgabe 3

Beweis der Formel für eine quadratische Pyramide:

$$O = G + M$$
$$O = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$$
$$O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s$$

Aufgabe 4

$$O = G + M$$
$$O = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$$
$$O = \frac{5\ \mathrm{cm}}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\ \mathrm{cm} \cdot 6\ \mathrm{cm}$$
$$O \approx 47{,}17\ \mathrm{cm}^2$$

Aufgabe 5

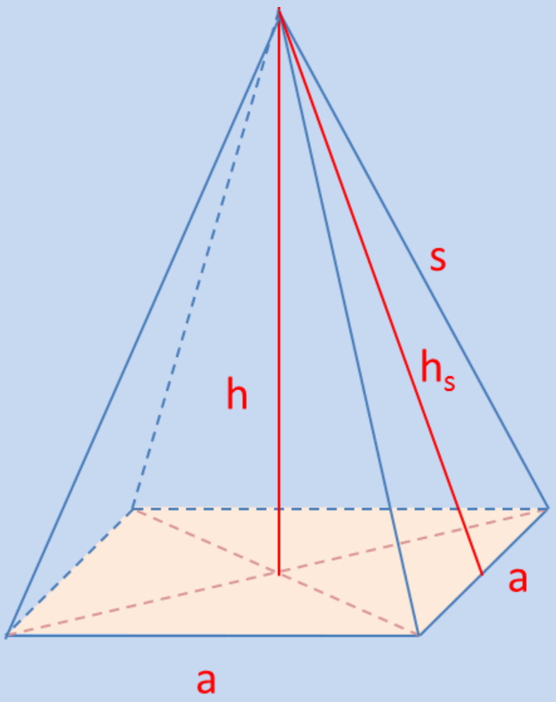
Beweis der Formel für eine dreiseitige Pyramide:

$$O = G + M$$
$$O = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$$
$$O = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} + \frac{3}{2} \cdot a \cdot h_s$$

Autor: Alexander Hermann
Datum: 15.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	
4 Messen	**LFS 11**	**Volumen von Pyramiden**	**Mathematik M4.11.05**
Kompetenz - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**			**Lernschritt**

Pyramidenvolumen berechnen



Bezug zu Teilkompetenzen

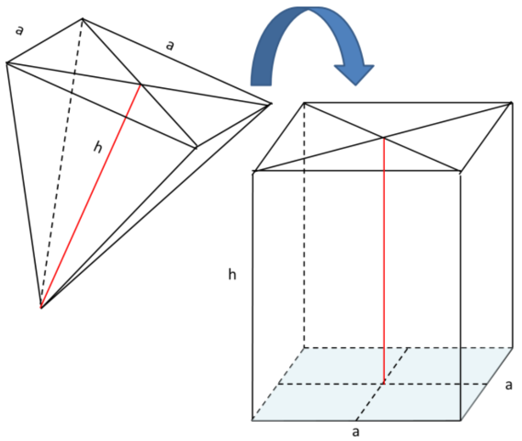
M4.11.05

Ich kann anhand der Grundkantenlänge und der Höhe das Volumen einer quadratischen Pyramide bestimmen.

Volumen einer quadratischen Pyramide berechnen

Ein Quader und eine quadratische Pyramide besitzen die gleiche Grundfläche G und Körperhöhe h. Die Pyramide wird mit Wasser gefüllt und anschließend in den Quader umgefüllt. Anschließend ist der Quader zu einem Drittel gefüllt.

Mit etwas Hilfe des Lehrers kannst du dieses Experiment selbst durchführen.



Du weißt bereits:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{Quader}}$$

und

$$V_{\text{Quader}} = G \cdot h$$

Hieraus ergibt sich folgende Formel:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

bzw.

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, a^2 \cdot h$$

Zur Erinnerung:
V_{Quader} = Grundfläche · Höhe

Für das **Volumen einer quadratischen Pyramide mit Grundkantenlänge a und Höhe h** gilt:

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}\, a^2 \cdot h}$$

Beispiele:

1. Eine quadratische Pyramide mit der Grundkante a = 8,0 cm und der Höhe h = 12,0 cm hat ein Volumen von 256 cm^3, denn

   $$V = \frac{1}{3} \cdot (8{,}0\ \text{cm})^2 \cdot 12{,}0\ \text{cm} = 256\ \text{cm}^3$$

2. Eine quadratische Pyramide mit der Grundkante a = 7 dm und der Höhe h = 60 cm hat ein Volumen von 98 dm^3, denn

   $$V = \frac{1}{3} \cdot (7{,}0\ \text{dm})^2 \cdot 6{,}0\ \text{dm} = 98\ \text{dm}^3$$

Setze in die Formel für a die Länge der Grundkante und für h die Höhe ein.

Achte darauf, dass du beide Längenangaben in derselben Einheit verwendest.

Aufgabe 1

☞ Berechne das Volumen der quadratischen Pyramide mit:

a) a = 12 cm und h = 22 cm,

b) a = 10,6 cm und h = 16,4 cm,

c) a = 5,9 cm und h = 8,6 cm.

Aufgabe 2

Eine Praline in Form einer quadratischen Pyramide hat die Grundkante mit einer Länge von 2,4 cm und eine Höhe von 3,2 cm.

☞ Berechne das Volumen der Praline.

Autor: Alexander Hermann
Datum: 15.01.2016

Kompetenzbereich **4 Messen**	Lernfortschritt **LFS 11**	Materialien/Titel **Volumen von Pyramiden**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**		

Mathematik
M4.11.05

Lösung

Aufgabe 1

a) $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, a^2 \cdot h$

$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, (12\text{ cm})^2 \cdot 22\text{ cm}$

$V_{\text{Pyramide}} = 1056\text{ cm}^3$

b) $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, a^2 \cdot h$

$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, (10{,}6\text{ cm})^2 \cdot 16{,}4\text{ cm}$

$V_{\text{Pyramide}} \approx 614{,}23\text{ cm}^3$

c) $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, a^2 \cdot h$

$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, (5{,}9\text{ cm})^2 \cdot 8{,}6\text{ cm}$

$V_{\text{Pyramide}} \approx 99{,}79\text{ cm}^3$

Aufgabe 2

$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, a^2 \cdot h$

$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, (2{,}4\text{ cm})^2 \cdot 3{,}6\text{cm}$

$V_{\text{Pyramide}} \approx 6{,}91\text{ cm}^3$

Die Praline hat ein Volumen von 6,91 cm^3.

Autor: Alexander Hermann
Datum: 15.01.2016

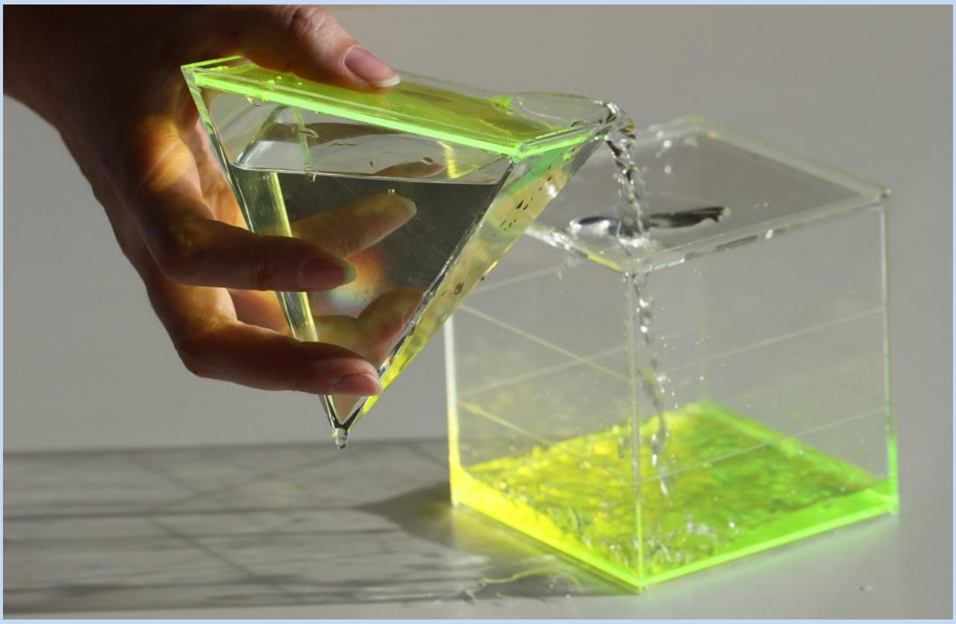
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	LFS 11	Volumenformel Pyramide (Füllen 1) (E)

Kompetenz
- Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.

Mathematik
M4.11.07

Lernschritt

Herleitung der Volumenformel für Pyramiden durch Umfüllen



Bezug zu Teilkompetenzen

M4.11.07

Ich kann eine anschauliche Begründung der Volumenformel für Pyramiden formulieren.

M4.11.05

Ich kann anhand der Grundkantenlänge und der Höhe das Volumen einer quadratischen Pyramide berechnen.

M4.11.10

Ich kann das Volumen von nicht-quadratischen Pyramiden berechnen.

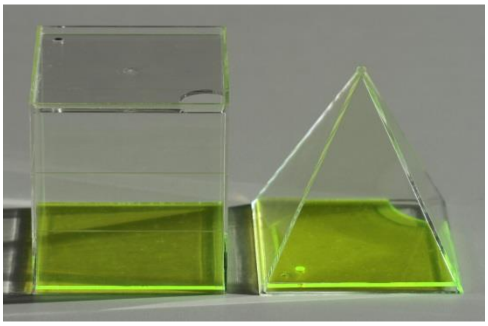
Formel zur Berechnung des Volumens einer Pyramide

Was du benötigst:
- Ein Füllkörpermodell einer quadratischen Pyramide
- Ein Füllkörpermodell eines Würfels mit gleicher Grundfläche
- Wasser

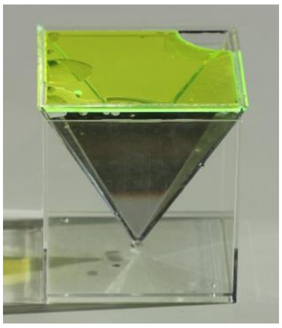
Um das Volumen einer solchen Pyramide zu berechnen, benötigt man eine Formel.
Du kennst bereits verschiedene Volumenformeln, beispielsweise für einen Würfel mit Kantenlänge a: $\mathbf{V = a^3}$.

Der Würfel ist ein spezieller Quader. Ganz allgemein gilt für jeden Quader: **Volumen = Grundfläche · Höhe**

Nimm dir zur Bestimmung des Pyramidenvolumens ein Körpermodell eines Würfels und einer Pyramide mit jeweils gleicher Grundfläche.

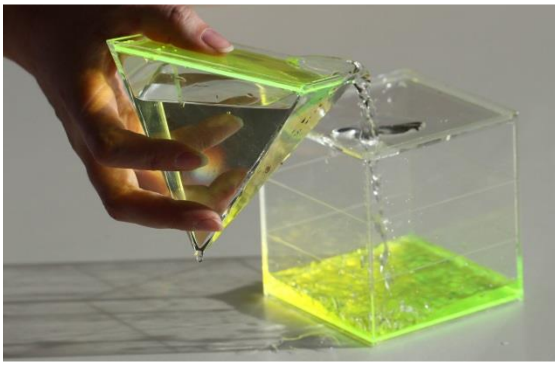


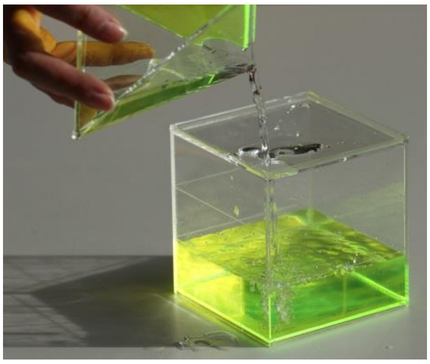
Fülle nun die Pyramide vollständig mit Wasser.



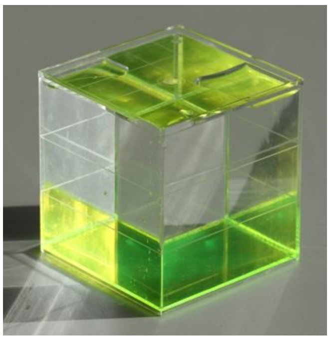
Der Würfel bleibt zunächst leer. Stelle ihn bereit.

Schütte nun das Wasser vorsichtig von der Pyramide in den Würfel.





Betrachte das Ergebnis und überlege:
Welcher Anteil des Würfels ist bereits gefüllt?



Wiederhole nun den Vorgang so oft, bis der Würfel gefüllt ist:

1) Pyramide füllen,
2) in den Würfel schütten,
3) überprüfen, welcher Anteil des Würfels gefüllt ist.

Überlege:
Wie oft passt das Volumen der Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h in einen Würfel mit Grundfläche G und Höhe h?

Aufgabe 1

☞ Stelle aufgrund deiner Überlegungen eine Formel zur Berechnung des Volumens einer Pyramide auf:

a) für eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h,

b) für eine quadratische Pyramide mit Grundkantenlänge a und Höhe h.

Aufgabe 2

☞ Berechne mithilfe deiner Formeln aus Aufgabe 1 jeweils das Volumen:

a) für eine quadratische Pyramide mit Grundkantenlänge 5 cm und Höhe 9 cm,

b) für eine quadratische Pyramide mit Grundkantenlänge 6 cm und Höhe 6 cm,

c) für eine rechteckige Pyramide mit den Grundkantenlängen 4 cm und 9 cm und Höhe 12 cm.

d) für eine dreiseitige Pyramide mit rechtwinkliger Grundfläche mit den Grundkantenlängen 5 cm, 12 cm und 13 cm und einer Höhe von 15 cm,

e) für eine dreiseitige Pyramide mit gleichseitiger Grundfläche mit Grundkantenlänge 9 cm und einer Höhe von 12 cm.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 11.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Volumenformel Pyramide (Füllen 1) (E)**
Kompetenz - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**		

Mathematik
M4.11.07

Lösung

Aufgabe 1

a) Für das Volumen V einer Pyramide mit Grundflächeninhalt G und Höhe h gilt die Formel $\mathbf{V = G \cdot h : 3}$ bzw. $\mathbf{V = \frac{1}{3} G \cdot h}$.

b) Für das Volumen V einer quadratischen Pyramide mit Grundkantenlänge a und Höhe h gilt die Formel $\mathbf{V = a^2 \cdot h : 3}$ bzw. $\mathbf{V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h}$.

Aufgabe 2

a) $V = a^2 \cdot h : 3 = (5\text{ cm})^2 \cdot 9\text{ cm} : 3 = \mathbf{75\text{ cm}^3}$

b) $V = a^2 \cdot h : 3 = (6\text{ cm})^2 \cdot 6\text{ cm} : 3 = \mathbf{72\text{ cm}^3}$

c) $V = G \cdot h : 3 = 4\text{ cm} \cdot 9\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} : 3 = \mathbf{144\text{ cm}^3}$

d) Da die aufeinander rechtwinkligen Grundkanten die Länge 5 cm und 12 cm haben (vgl. Satz des Pythagoras: $5^2 + 12^2 = 13^2$), beträgt der Inhalt der Grundfläche

$$G = \frac{1}{3} a \cdot h_a = \frac{1}{3} 5\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} = 20\text{ cm}^2.$$

Volumen:

$$V = G \cdot h : 3 = 20\text{ cm}^2 \cdot 15\text{ cm} : 3 = \mathbf{100\text{ cm}^3}$$

e) Wegen $G = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (9\text{ cm})^2 \approx 35{,}07\text{ cm}^2$ beträgt das Volumen

$$V = G \cdot h : 3 \approx 35{,}07\text{ cm}^2 \cdot 12\text{ cm} : 3 = \mathbf{140{,}28\text{ cm}^3}$$

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 11.11.2015

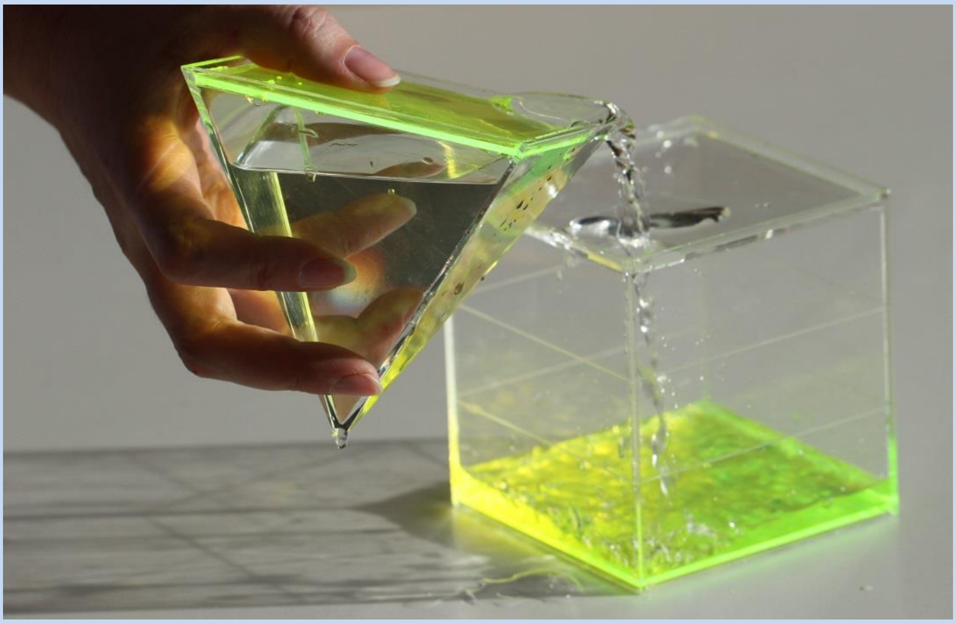
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 11**	**Volumenformel Pyramide (Füllen 2) (E)**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**

Mathematik
M4.11.07

Lernschritt

Herleitung der Volumenformel für Pyramiden durch Umfüllen



Bezug zu Teilkompetenzen

M4.11.07

Ich kann eine anschauliche Begründung der Volumenformel für Pyramiden formulieren.

M4.11.05

Ich kann anhand der Grundkantenlänge und der Höhe das Volumen einer quadratischen Pyramide berechnen.

M4.11.10

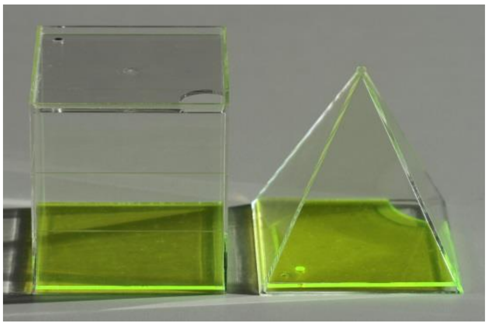
Ich kann das Volumen von nicht-quadratischen Pyramiden berechnen.

Formel zur Berechnung des Volumens einer Pyramide

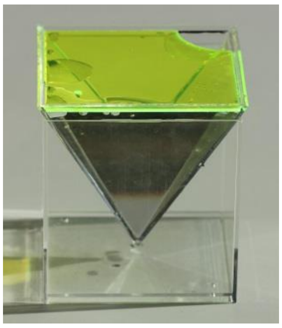
Um das Volumen einer solchen Pyramide zu berechnen, benötigt man eine Formel.
Du kennst bereits verschiedene Volumenformeln, beispielsweise für einen Würfel mit Kantenlänge a: $\mathbf{V = a^3}$.

Der Würfel ist ein spezieller Quader. Ganz allgemein gilt für jeden Quader: **Volumen = Grundfläche · Höhe**

Du kannst die Formel zur Bestimmung des Pyramidenvolumens mithilfe der Körpermodelle eines Würfels und einer Pyramide mit jeweils gleicher Grundfläche bestimmen.

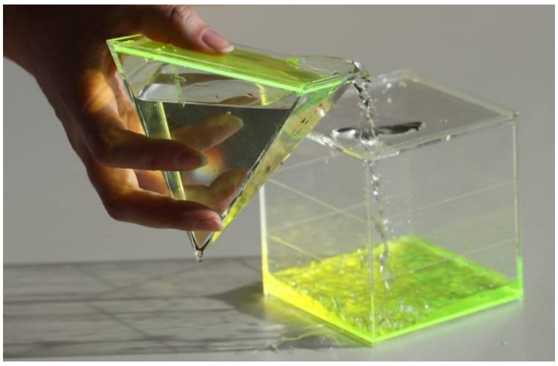


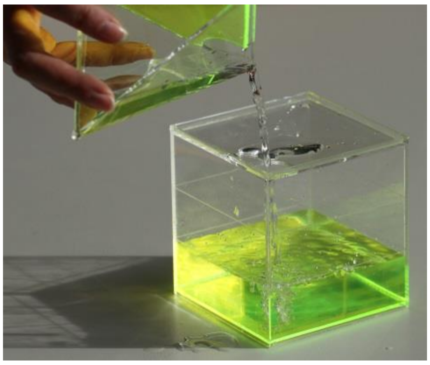
Dazu füllt man die Pyramide vollständig mit Wasser.



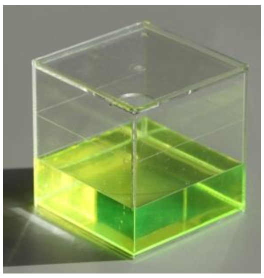
Der Würfel bleibt zunächst leer.

Man schüttet nun das Wasser vorsichtig von der Pyramide in den Würfel.

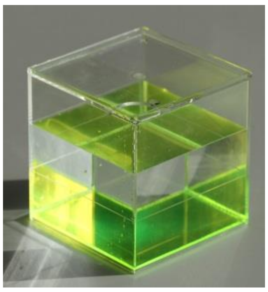


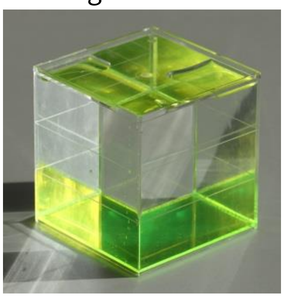


Ein Drittel des Würfels ist gefüllt.



Man wiederholt diesen Vorgang nun noch zweimal.
Am Ende ist der Würfel exakt bis oben aufgefüllt.





Überlege:
Wie oft passt das Volumen der Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h in einen Würfel mit Grundfläche G und Höhe h?

Aufgabe 1

☞ Stelle aufgrund der Beobachtungen eine Formel zur Berechnung des Volumens einer Pyramide auf:

a) für eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h,

b) für eine quadratische Pyramide mit Grundkantenlänge a und Höhe h.

Aufgabe 2

☞ Berechne mithilfe deiner Formeln aus Aufgabe 1 jeweils das Volumen:

a) für eine quadratische Pyramide mit Grundkantenlänge 5 cm und Höhe 9 cm,

b) für eine quadratische Pyramide mit Grundkantenlänge 6 cm und Höhe 6 cm,

c) für eine rechteckige Pyramide mit den Grundkantenlängen 4 cm und 9 cm und Höhe 12 cm.

d) für eine dreiseitige Pyramide mit rechtwinkliger Grundfläche mit den Grundkantenlängen 5 cm, 12 cm und 13 cm und einer Höhe von 15 cm,

e) für eine dreiseitige Pyramide mit gleichseitiger Grundfläche mit Grundkantenlänge 9 cm und einer Höhe von 12 cm.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 11.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Volumenformel Pyramide (Füllen 2) (E)**
Kompetenz - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**		

Mathematik
M4.11.07

Lösung

Aufgabe 1

a) Für das Volumen V einer Pyramide mit Grundflächeninhalt G und Höhe h gilt die Formel $\mathbf{V = G \cdot h : 3}$ bzw. $\mathbf{V = \frac{1}{3} G \cdot h}$.

b) Für das Volumen V einer quadratischen Pyramide mit Grundkantenlänge a und Höhe h gilt die Formel $\mathbf{V = a^2 \cdot h : 3}$ bzw. $\mathbf{V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h}$.

Aufgabe 2

a) $V = a^2 \cdot h : 3 = (5\text{ cm})^2 \cdot 9\text{ cm} : 3 = \mathbf{75\text{ cm}^3}$

b) $V = a^2 \cdot h : 3 = (6\text{ cm})^2 \cdot 6\text{ cm} : 3 = \mathbf{72\text{ cm}^3}$

c) $V = G \cdot h : 3 = 4\text{ cm} \cdot 9\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} : 3 = \mathbf{144\text{ cm}^3}$

d) Da die aufeinander rechtwinkligen Grundkanten die Länge 5 cm und 12 cm haben (vgl. Satz des Pythagoras: $5^2 + 12^2 = 13^2$), beträgt der Inhalt der Grundfläche

$$G = \tfrac{1}{3} a \cdot h_a = \tfrac{1}{3} 5\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} = 20\text{ cm}^2.$$

Volumen:

$$V = G \cdot h : 3 = 20\text{ cm}^2 \cdot 15\text{ cm} : 3 = \mathbf{100\text{ cm}^3}$$

e) Wegen $G = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (9\text{ cm})^2 \approx 35{,}07\text{ cm}^2$ beträgt das Volumen

$$V = G \cdot h : 3 \approx 35{,}07\text{ cm}^2 \cdot 12\text{ cm} : 3 = \mathbf{140{,}28\text{ cm}^3}$$

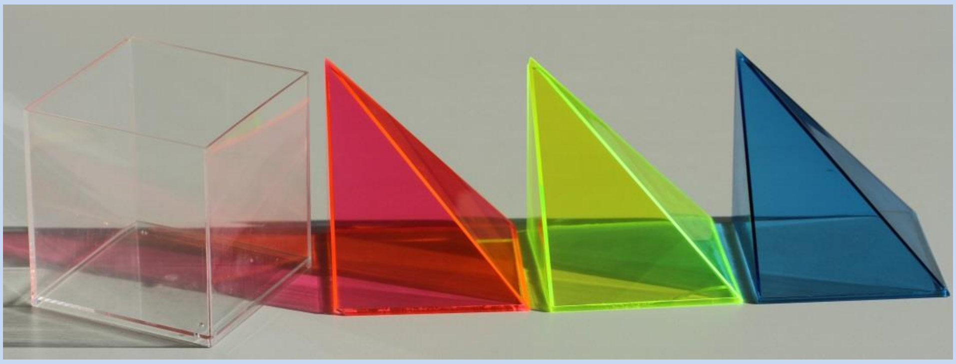
Autor: Andreas von Scholz
Datum: 11.11.2015

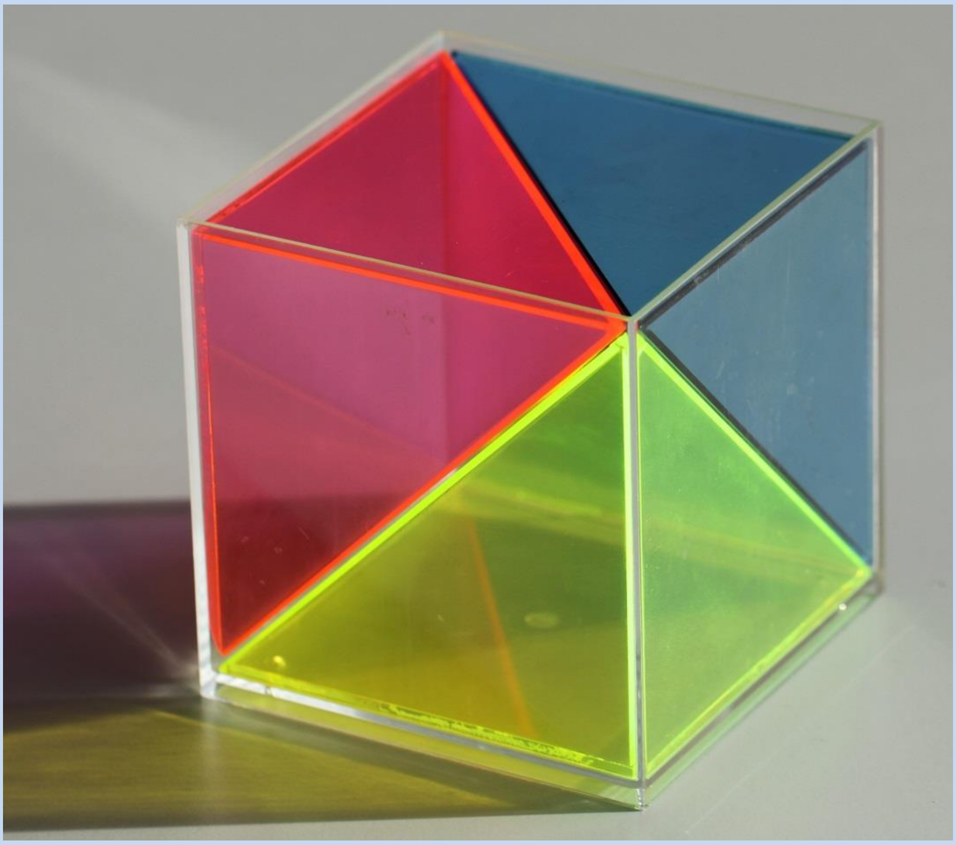
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 11**	**Volumenformel Pyramide (Zerlegung 1) (E)**
Kompetenz - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**		

Mathematik
M4.11.07

Lernschritt

Herleitung der Volumenformel für Pyramiden durch Zerlegung





Bezug zu Teilkompetenzen

M4.11.07

Ich kann eine anschauliche Begründung der Volumenformel für Pyramiden formulieren.

M4.11.05

Ich kann anhand der Grundkantenlänge und der Höhe das Volumen einer quadratischen Pyramide berechnen.

M4.11.10

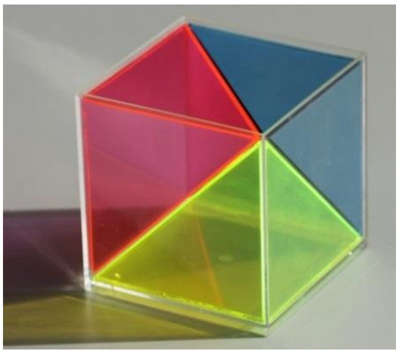
Ich kann das Volumen von nicht-quadratischen Pyramiden berechnen.

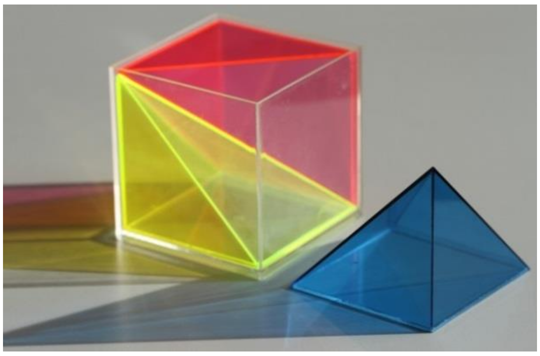
Formel zur Berechnung des Volumens einer Pyramide

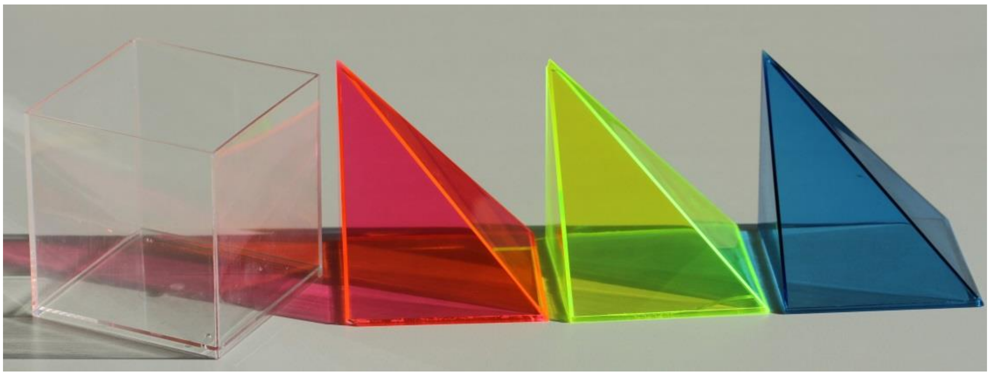
Um das Volumen einer solchen Pyramide zu berechnen, benötigt man eine Formel.
Du kennst bereits verschiedene Volumenformeln, beispielsweise für einen Würfel mit Kantenlänge a: $\mathbf{V = a^3}$.

Der Würfel ist ein spezieller Quader. Ganz allgemein gilt für jeden Quader: **Volumen = Grundfläche · Höhe**

Wie du auf den Abbildungen sehen kannst, kann man einen Würfel geschickt in jeweils genau gleiche Pyramiden zerlegen. Sie haben als Höhe die Kantenlänge des Würfels. Ihre Grundfläche ist jeweils eine Seitenfläche des Würfels.







Aufgabe 1

☞ Stelle eine Formel zur Berechnung des Volumens einer Pyramide auf:

a) für eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h,

b) für eine quadratische Pyramide mit Grundkantenlänge a und Höhe h.

Aufgabe 2

☞ Berechne mithilfe deiner Formeln aus Aufgabe 1 jeweils das Volumen:

a) für eine quadratische Pyramide mit Grundkantenlänge 4 cm und Höhe 12 cm,

b) für eine quadratische Pyramide mit Grundkantenlänge 9 cm und Höhe 9 cm,

c) für eine Pyramide mit einer rechteckigen Grundfläche mit den Kantenlängen 8 cm und 7 cm und einer Höhe von 6 cm,

d) für eine dreiseitige Pyramide mit rechtwinkliger Grundfläche mit den Grundkantenlängen 3 cm, 4 cm und 5 cm und einer Höhe von 12 cm,

e) für eine dreiseitige Pyramide mit gleichseitiger Grundfläche mit Grundkantenlänge 5 cm und einer Höhe von 8 cm.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 18.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 11**	**Volumenformel Pyramide (Zerlegung 1) (E)**
Kompetenz - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**		

Mathematik
M4.11.07

Lösung

Aufgabe 1

a) Für das Volumen V einer Pyramide mit Grundflächeninhalt G und Höhe h gilt die Formel $\mathbf{V = G \cdot h : 3}$ bzw. $\mathbf{V = \frac{1}{3} G \cdot h}$.

b) Für das Volumen V einer quadratischen Pyramide mit Grundkantenlänge a und Höhe h gilt die Formel $\mathbf{V = a^2 \cdot h : 3}$ bzw. $\mathbf{V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h}$.

Aufgabe 2

a) $V = a^2 \cdot h : 3 = (4\text{ cm})^2 \cdot 12\text{ cm} : 3 = \mathbf{64\text{ cm}^3}$

b) $V = a^2 \cdot h : 3 = (9\text{ cm})^2 \cdot 9\text{ cm} : 3 = \mathbf{243\text{ cm}^3}$

c) $V = G \cdot h : 3 = 8\text{ cm} \cdot 7\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} : 3 = \mathbf{112\text{ cm}^3}$

d) Da die aufeinander rechtwinkligen Grundkanten die Längen 3 cm und 4 cm haben (vgl. Satz des Pythagoras), beträgt der Inhalt der Grundfläche

$$G = \frac{1}{3} a \cdot h_a = \frac{1}{3} 3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 6\text{ cm}^2.$$

Volumen:

$$V = G \cdot h : 3 = 6\text{ cm}^2 \cdot 12\text{ cm} : 3 = \mathbf{24\text{ cm}^3}$$

e) Wegen $G = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (5\text{ cm})^2 \approx 10{,}83\text{ cm}^2$ beträgt das Volumen

$$V = G \cdot h : 3 \approx 10{,}83\text{ cm}^2 \cdot 8\text{ cm} : 3 = \mathbf{28{,}88\text{ cm}^3}$$

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 18.11.2015

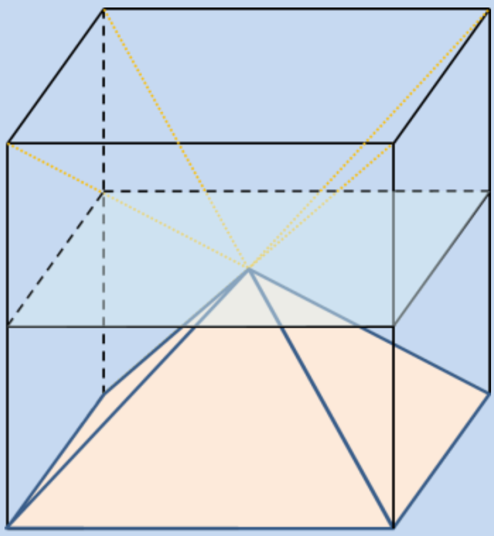
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 11**	**Volumenformel Pyramide (Zerlegung 2) (E)**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**

Mathematik
M4.11.07

Lernschritt

Herleitung der Volumenformel für Pyramiden durch Zerlegung



Bezug zu Teilkompetenzen

M4.11.07

Ich kann eine anschauliche Begründung der Volumenformel für Pyramiden formulieren.

M4.11.05

Ich kann anhand der Grundkantenlänge und der Höhe das Volumen einer quadratischen Pyramide berechnen.

M4.11.06

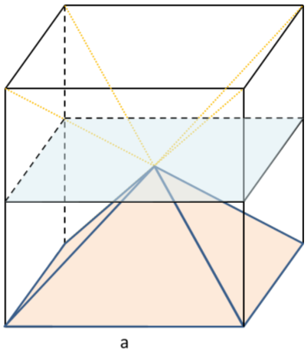
Ich kann die Formel für das Volumen einer quadratischen Pyramide nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.

Volumenformel einer quadratischen Pyramide herleiten

Um das Volumen einer solchen Pyramide zu berechnen, benötigt man eine Formel.
Du kennst bereits verschiedene Volumenformeln, beispielsweise die für einen Würfel: **V = a³**.

Der Würfel ist ein spezieller Quader. Ganz allgemein gilt für jeden Quader: **Volumen = Grundfläche · Höhe**

Wie du auf der Abbildung sehen kannst, kann man einen Würfel durch die vier Raumdiagonalen geschickt in sechs jeweils genau gleiche Pyramiden zerlegen. Sie haben als Höhe die halbe Kantenlänge des Würfels. Ihre Grundfläche ist jeweils eine Seitenfläche des Würfels.



Sieht man den halben Würfel als einen Quader mit der Grundfläche a^2 und der Höhe $h = \frac{a}{2}$, so hat die Pyramide $\frac{1}{3}$ des Quadervolumens.

Aufgabe 1

☞ Stelle eine Formel zur Berechnung des Volumens einer Pyramide auf:

a) für eine quadratische Pyramide mit Grundkantenlänge a und Höhe h,

b) für eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h.

Aufgabe 2

☞ Berechne mithilfe deiner Formeln die gesuchte Größe:

a) das Volumen einer quadratischen Pyramide mit Grundkantenlänge 7 cm und Höhe 15 cm

b) das Volumen einer quadratischen Pyramide mit einer Grundfläche von 64 cm² und einer Höhe von 6 cm

c) die Höhe einer quadratischen Pyramide mit einem Volumen von 100 cm³ und einer Grundkantenlänge von 5 cm

Autor: Alexander Hermann
Datum: 15.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	
4 Messen	**LFS 11**	**Volumenformel Pyramide (Zerlegung 2) (E)**	**Mathematik M4.11.07**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**			**Lösung**

Aufgabe 1

a) $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6}\, V_{\text{Würfel}}$

Sieht man den halben Würfel als einen Quader mit der Grundfläche a^2 und der Höhe $\frac{a}{2}$, so hat die Pyramide $\frac{1}{3}$ des Quadervolumens.

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, V_{\text{Quader}}$$
$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, G \cdot h_{\text{Quader}}$$
$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, a^2 \cdot \frac{a}{2}$$
$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, a^2 \cdot h_{\text{Pyramide}}$$

Zur Erinnerung:
V_{Quader} = Grundfläche · Höhe

Für eine quadratische Pyramide mit Grundkantenlänge a und Höhe h

$$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h.$$

b) Für eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h gilt im Allgemeinen

$$V = \frac{1}{3}\, G \cdot h.$$

Aufgabe 2

a) Berechnung von V_{Pyramide}:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, a^2 \cdot h$$
$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot (7\text{ cm})^2 \cdot 15\text{ cm}$$
$$V_{\text{Pyramide}} = 245\text{ cm}^3$$

b) Berechnung von V_{Pyramide}:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, a^2 \cdot h$$
$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot 64\text{ cm}^2 \cdot 6\text{ cm}$$
$$V_{\text{Pyramide}} = 128\text{ cm}^3$$

c) Berechnung von h_{Pyramide}:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\, a^2 \cdot h$$
$$h_{\text{Pyramide}} = \frac{3 \cdot V}{a^2}$$
$$h_{\text{Pyramide}} = \frac{3 \cdot 100\text{ cm}^3}{(5\text{ cm})^2}$$
$$h_{\text{Pyramide}} = 12\text{ cm}$$

Autor: Alexander Hermann
Datum: 15.01.2016

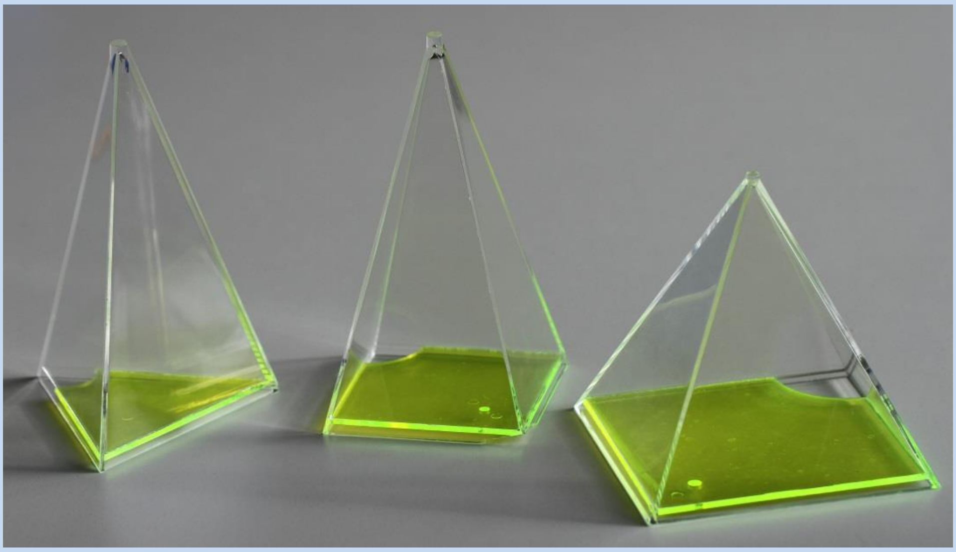
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	LFS 11	Volumenbestimmung von Pyramiden

Mathematik
M4.11.05

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**

Lernschritt

Volumenbestimmung von Pyramiden



Bezug zu Teilkompetenzen

M4.11.05

Ich kann anhand der Grundkantenlänge und der Höhe das Volumen einer quadratischen Pyramide berechnen.

M4.11.10

Ich kann das Volumen von nicht-quadratischen Pyramiden berechnen.

M4.11.04

Ich kann die Seitenhöhe einer quadratischen Pyramide mit bekannter Grundkantenlänge berechnen, wenn ihre Höhe oder die Länge ihrer Seitenkante gegeben ist.

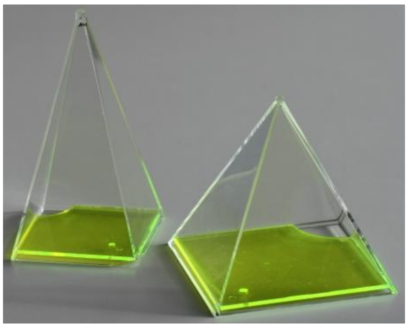
M4.11.02

Ich kann anhand von Grundkantenlänge und Seitenhöhe den Oberflächeninhalt einer quadratischen Pyramide berechnen.

Ausmessen einer Pyramide
Bestimmen ihres Volumens und ihrer Oberfläche

Aufgabe 1

Nimm dir einen Füllkörper in der Form einer quadratischen Pyramide.



☞ Miss die Länge der Grundkanten und die Höhe der Pyramide.

Grundkantenlänge: __________

Höhe: ______________________

☞ Berechne mithilfe dieser Maße das Volumen der Pyramide.

Volumen: _________________________

☞ Fülle die Pyramide mit Wasser, so dass sie bis oben gefüllt ist.

☞ Schütte das Wasser aus der Pyramide in einen leeren Messbecher. Lies anhand der Markierung auf dem Messbecher das Füllvolumen ab.

Füllvolumen: _____________________

Stimmen beide Volumina überein?

☞ Erkläre eine mögliche Abweichung.

☞ Bestimme den Oberflächeninhalt der Pyramide.

Wiederhole dasselbe ggf. mit weiteren quadratischen Pyramiden.

Was du benötigst:
- mindestens ein Füllkörpermodell einer quadratischen Pyramide
- Wasser
- einen Messbecher
- ein Lineal, Maßband o. ä.

Du kannst die Pyramidenhöhe auch berechnen!

Für den Oberflächeninhalt benötigst du die Höhe der Seitendreiecke. Zeichne ein solches Seitendreieck.

Aufgabe 2

Nimm dir einen Füllkörper in der Form einer Dreieckspyramide und führe mit ihm dasselbe durch.

☞ Miss die Länge der Kanten der dreieckigen Grundfläche und die Höhe der Pyramide:

Grundkantenlänge: ________________

Pyramidenhöhe: __________________

☞ Zeichne das Grundflächendreieck und ermittle seinen Flächeninhalt. Dreiecksgrundfläche: _______________

☞ Berechne mithilfe dieser Maße das Volumen der Pyramide.

Volumen: _________________________

☞ Fülle die Pyramide mit Wasser, so dass sie bis oben gefüllt ist, und miss das Füllvolumen mit Hilfe eines Messbechers.

Füllvolumen: _____________________

Stimmen beide Volumina überein?

☞ Erkläre eine mögliche Abweichung.

☞ Bestimme den Oberflächeninhalt der Pyramide.

Was du benötigst:
- das Füllkörpermodell einer Dreieckspyramide
- Wasser
- einen Messbecher
- ein Lineal, Maßband o. ä.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 18.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	Mathematik
4 Messen	**LFS 11**	**Volumenbestimmung von Pyramiden**	**M4.11.05**
Kompetenz			**Lösung**
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**			

Aufgabe 1

Hohe Pyramide:
Grundkantenlänge: **7 cm**
Höhe: **13 cm**
gemessen oder berechnet mit
Seitenhöhe der Manteldreiecke s = 13,5 cm und
$h = \sqrt{(13{,}5\ \text{cm})^2 - (3{,}5\ \text{cm})^2} \approx 13{,}0$ cm
Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot (7\ \text{cm})^2 \cdot 13\ \text{cm} = \mathbf{212\ cm^3}$

Inhalt der Dreiecksfläche:
$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 7\ \text{cm} \cdot 13{,}5\ \text{cm} = 47{,}25\ \text{cm}^2$
Oberfläche: $O = (7\ \text{cm})^2 + 4 \cdot 47{,}25\ \text{cm}^2 = \mathbf{238\ cm^2}$

Flachere Pyramide:
Grundkantenlänge: **10 cm**
Höhe: **10 cm**
gemessen oder berechnet mit
Seitenhöhe der Manteldreiecke s = 11,2 cm und
$h = \sqrt{(11{,}2\ \text{cm})^2 - (5\ \text{cm})^2} \approx 10{,}0$ cm
Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot (10\ \text{cm})^2 \cdot 10\ \text{cm} = \mathbf{333\ cm^3}$

Inhalt der Dreiecksfläche:
$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 10\ \text{cm} \cdot 11{,}2\ \text{cm} = 56\ \text{cm}^2$
Oberfläche: $O = (10\ \text{cm})^2 + 4 \cdot 56\ \text{cm}^2 = \mathbf{324\ cm^2}$

Aufgabe 2

Grundkantenlänge: **8,5 cm**
Höhe: **13,5 cm**
gemessen oder berechnet mit
Seitenhöhe der Manteldreiecke s = 14 cm und
Höhe des Grundflächendreiecks $h_\Delta = 7{,}4$ cm
$h_\Delta = \sqrt{(8{,}5\ \text{cm})^2 - (8{,}5\ \text{cm} : 2)^2} \approx 7{,}4$ cm
$h = \sqrt{(14\ \text{cm})^2 - (7{,}4\ \text{cm} : 2)^2} \approx 13{,}5$ cm
Flächeninhalt der dreieckigen Grundfläche:
$G = \frac{1}{2} \cdot 8{,}5\ \text{cm} \cdot 7{,}4\ \text{cm} \approx 31{,}5\ \text{cm}^2$
Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot 31{,}5\ \text{cm}^2 \cdot 13{,}5\ \text{cm} \approx \mathbf{142\ cm^3}$

Inhalt der Mantel-Dreiecksfläche:
$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 8{,}5\ \text{cm} \cdot 14\ \text{cm} = 59{,}5\ \text{cm}^2$
Oberfläche: $O = 31{,}5\ \text{cm}^2 + 3 \cdot 59{,}5\ \text{cm}^2 = \mathbf{210\ cm^2}$

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 18.11.2015

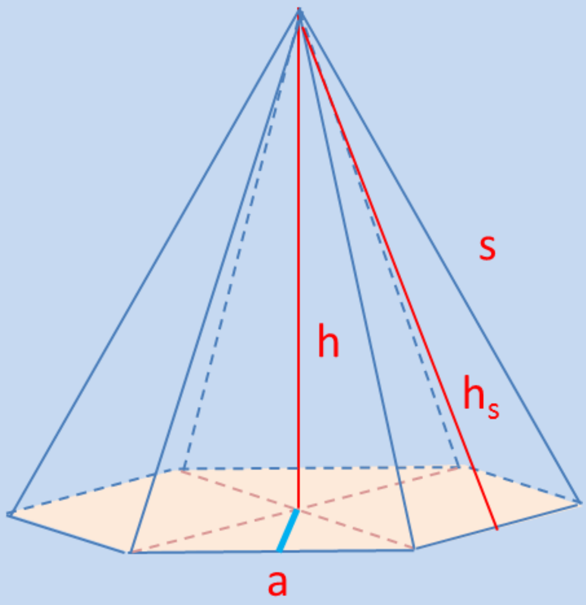
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 11**	**Fehlende Größen bei Pyramiden**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**

Mathematik
M4.11.12

Lernschritt

Fehlende Größen bei Pyramiden berechnen



Zusätzlich:

M5.12.05

Ich kann Streckenlängen wie Höhe oder Seitenhöhen in Körpern mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen.

Bezug zu Teilkompetenzen

M4.11.12

Ich kann die Formeln für Oberflächeninhalt und Volumen einer Pyramide nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.

M4.11.09

Ich kann das Volumen von Pyramiden und Prismen unter Berücksichtigung der Grundfläche und der Höhe vergleichen.

M4.11.03

Ich kann die Formel für den Oberflächeninhalt einer quadratischen Pyramide nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.

M4.11.04

Ich kann die Seitenhöhe einer quadratischen Pyramide mit bekannter Grundkantenlänge berechnen, wenn ihre Höhe oder die Länge ihrer Seitenkante gegeben ist.

M4.11.06

Ich kann die Formel für das Volumen einer quadratischen Pyramide nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.

M4.11.08

Ich kann die Höhe einer quadratischen Pyramide mit bekannter Grundkantenlänge berechnen, wenn ihre Seitenhöhe oder die Länge ihrer Seitenkante gegeben ist.

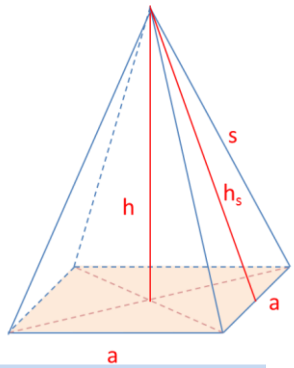
Fehlende Größen bei Pyramiden berechnen

Aufgabe 1

Fünf quadratische Pyramiden haben die folgenden Maße:

	a)	b)	c)	d)	e)
Grundkante a	6 cm	4 cm		4 cm	
Höhe h	7 cm		6 cm		7 cm
Seitenkante s				8 cm	9 cm
Volumen V		64 cm³	50 cm³		

☞ Berechne jeweils die fehlenden Werte und fülle die Tabelle aus.



Zur Erinnerung:
$a^2 = b^2 + c^2$ (Pythagoras)

Aufgabe 2

Fünf quadratische Pyramiden haben die folgenden Maße:

	a)	b)	c)	d)	e)
Grundkante a	4 cm	5 cm		4 cm	8 cm
Höhe h		7 cm			
Seitenhöhe h_s	9 cm		6 cm		
Seitenkante s				5 cm	
Mantelfläche M					
Grundfläche G			9 cm²		
Oberfläche O					176 cm²

☞ Berechne jeweils die fehlenden Werte und fülle die Tabelle aus.

Tipp:
Suche immer geeignete rechtwinklige Dreiecke. Dann kannst du fehlende Größen mit dem Satz des Pythagoras berechnen.

Bspw. ist $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = {h_s}^2$ und damit

$$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Aufgabe 3

Eine quadratische Pyramide hat eine Oberfläche von 280 cm². Die Höhe des Manteldreiecks beträgt 9 cm. Wie lang ist die Grundkante der Pyramide?

☞ Bestimme die Länge der Grundkante. Verwende die Formel.

Aufgabe 4

Gegeben sind verschiedene Dreieckspyramiden mit einer gleichseitigen Grundfläche mit Kantenlänge 4 cm.

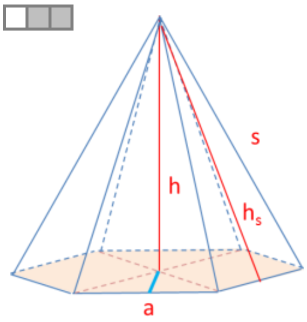
a) Eine solche Pyramide hat eine Mantelfläche von 90 cm².

☞ Berechne die Seitenhöhe h_s der Seitendreiecke.

b) Eine andere dieser Pyramiden hat ein Volumen von 42 cm³.

☞ Berechne die Höhe der Pyramide.

Aufgabe 5



Gegeben ist eine regelmäßige Sechseckpyramide.

a) Sie hat eine Grundfläche von 90 cm^2.

☞ Berechne die Länge ihrer Grundkante und den Durchmesser ihrer Grundfläche.

b) Eine andere Sechseckpyramide hat eine Mantelfläche von 90 cm^2.

☞ Stelle in einer Tabelle mehrere Möglichkeiten für die Grundkantenlänge a und die Seitenhöhe h_s der Pyramide dar. Berechne jeweils auch die Höhe der Pyramide.

☞ Überprüfe, ob du mit den errechneten Maßen jeweils tatsächlich eine Pyramide basteln könntest.

☞ Formuliere eine Bedingung, mit der du diese Überprüfung durchführen kannst.

Aufgabe 6

a) Eine Pyramide und ein Prisma haben dieselbe Grundfläche.

☞ Gib an,

1. wie viel mal größer das Volumen der Pyramide ist, wenn sie sechsmal so hoch ist wie das Prisma,
2. wie viel mal größer das Volumen des Prismas ist, wenn es viermal so hoch ist wie die Pyramide,
3. wie das Verhältnis der beiden Volumina ist, wenn Pyramide und Prisma gleich hoch sind.

b) Eine Pyramide und ein Prisma haben dieselbe Höhe.

☞ Gib an, wie das Verhältnis der beiden Volumina ist, wenn

1. Pyramide und Prisma dieselbe Grundfläche haben,
2. die Grundfläche des Prismas dreimal so groß wie die der Pyramide ist,
3. die Grundfläche der Pyramide doppelt so groß wie die des Prismas ist.

c) Nun haben Pyramide und Prisma jeweils unterschiedliche Grundflächen *und* Höhen.

☞ Gib an, wie das Verhältnis der beiden Volumina ist, wenn

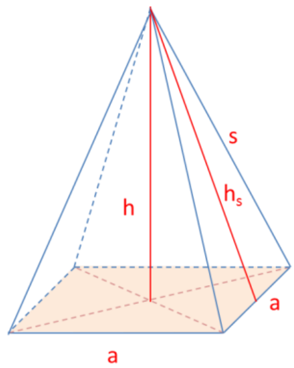
1. die Grundfläche der Pyramide doppelt so groß wie die des Prismas ist, das Prisma aber doppelt so hoch wie die Pyramide,
2. die Grundfläche des Prismas zweimal so groß ist wie die der Pyramide, die Pyramide aber dreimal so hoch wie das Prisma,
3. die Grundfläche und die Höhe des Prismas jeweils doppelt so groß sind wie die entsprechenden Größen bei der Pyramide.

Autoren:
Andreas von Scholz
Ewald Seiler
Datum: 10.02.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	
4 Messen	**LFS 11**	**Fehlende Größen bei Pyramiden**	**Mathematik M4.11.12**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**			**Lösung**

Aufgabe 1

	a)	b)	c)	d)	e)
Grundkante a	6 cm	4 cm	**5 cm**	4 cm	**8 cm**
Höhe h	7 cm	**12 cm**	6 cm	**≈ 7,5 cm**	7 cm
Seitenkante s	**≈ 8,2 cm**	**≈ 12,3 cm**	**≈ 7,0 cm**	8 cm	9 cm
Volumen V	**84 cm³**	64 cm³	50 cm³	**≈ 40 cm³**	**≈ 149 cm³**



Aufgabe 2

	a)	b)	c)	d)	e)
Grundkante a	4 cm	5 cm	**3 cm**	4 cm	8 cm
Höhe h	**≈ 8,8 cm**	7 cm	**≈ 5,8 cm**	**≈ 4,1 cm**	**≈ 5,7 cm**
Seitenhöhe h_s	9 cm	**≈ 7,4 cm**	6 cm	**≈ 4,6 cm**	**7 cm**
Seitenkante s	**≈ 9,2 cm**	**≈ 7,8 cm**	**≈ 6,4 cm**	5 cm	**≈ 8,1 cm**
Mantelfläche M	**72 cm²**	**≈ 74 cm²**	**36 cm²**	**≈ 37 cm²**	**112 cm²**
Grundfläche G	**16 cm²**	**25 cm²**	9 cm²	**16 cm²**	**64 cm²**
Oberfläche O	**88 cm²**	**≈ 99 cm²**	**45 cm²**	**≈ 53 cm²**	176 cm²

Aufgabe 3

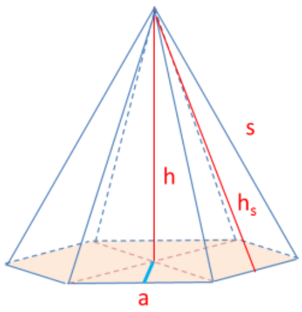
Wegen $280\text{ cm}^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot 9 + a^2 = 18\,a + a^2$ ist $\mathbf{a = 10\text{ cm}}$.
(Ausprobieren oder Lösen der quadratischen Gleichung per Lösungsformel)

Aufgabe 4

a) Wegen $90\text{ cm}^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot h_s$ ist $\mathbf{h_s = 15\text{ cm}}$.

b) Wegen $h_\Delta = \sqrt{(4\text{ cm})^2 - (2\text{ cm})^2} = \sqrt{12}\text{ cm}$ und
$G = \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot \sqrt{12}\text{ cm} = 2\sqrt{12}\text{ cm}^2 \approx 6{,}9\text{ cm}^2$
folgt mit $G \cdot h = 42\text{ cm}^3$
$\mathbf{h} = 42\text{ cm}^3 : 2\sqrt{12}\text{ cm}^2 \approx \mathbf{6{,}1\text{ cm}}$

Aufgabe 5



a) Wegen $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot h_\Delta \cdot a = 90\ \text{cm}^2$ und $h_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ gilt $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = 30\ \text{cm}^2$

Die **Grundkanten** ist also $a = \sqrt{\frac{60}{\sqrt{3}}}\ \text{cm} \approx \mathbf{5,9\ cm}$ lang.

Der **Durchmesser** beträgt $d = 2 \cdot h_\Delta = \sqrt{3}\,a \approx \mathbf{10,2\ cm}$.

b) Für jedes Manteldreieck gilt $A_\Delta = 90\ \text{cm}^2 : 6 = 15\ \text{cm}^2$. Damit errechnet man zueinander passende a und h_s:

Varianten	1)	2)	3)	4)	…
Grundkantenlänge a	5 cm	6 cm	3 cm	10 cm	…
Seitenhöhe h_s	6 cm	5 cm	10 cm	3 cm	…

Höhe h	≈ 5,5 cm	4 cm	≈ 9,9 cm	geht nicht!	…

Selbst wenn man die Höhe h bestimmen kann, ist eine solche Pyramide aber nur dann konstruierbar, wenn die Seitenhöhe h_s größer als der halbe Durchmesser bzw. die Höhe eines der sechs Teildreiecke der Grundfläche ist, denn ansonsten treffen sich die Manteldreiecke nicht in einer Spitze!

Die Prüfbedingung lautet daher:

Es muss gelten: $h_s > \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Man kann die Variante 2 (a = 6 cm, h_s = 5 cm) nicht basteln!

Aufgabe 6

a) Bei derselben Grundfläche:

1. $V_{Pyramide} = 2 \cdot V_{Prisma}$
2. $V_{Prisma} = 12 \cdot V_{Pyramide}$
3. $V_{Prisma} = 3 \cdot V_{Pyramide}$

b) Bei derselben Höhe:

1. $V_{Prisma} = 3 \cdot V_{Pyramide}$
2. $V_{Prisma} = 9 \cdot V_{Pyramide}$
3. $V_{Prisma} = 1{,}5 \cdot V_{Pyramide}$

c) Bei unterschiedlichen Maßen:

1. $V_{Prisma} = 3 \cdot V_{Pyramide}$
2. $V_{Prisma} = 2 \cdot V_{Pyramide}$
3. $V_{Prisma} = 12 \cdot V_{Pyramide}$

Autoren:
Andreas von Scholz
Ewald Seiler
Datum: 10.02.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 11**	**Die ägyptischen Pyramiden**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**

Mathematik
M4.11

Lernthema

Die ägyptischen Pyramiden

Abb.: Cheopspyramide (pixabay)

Bezug zu Teilkompetenzen

M4.11.02

Ich kann anhand von Grundkantenlänge und Seitenhöhe den Oberflächeninhalt einer quadratischen Pyramide berechnen.

M4.11.04

Ich kann die Seitenhöhe einer quadratischen Pyramide mit bekannter Grundkantenlänge berechnen, wenn ihre Höhe oder die Länge ihrer Seitenkante gegeben ist.

M4.11.05

Ich kann anhand der Grundkantenlänge und der Höhe das Volumen einer quadratischen Pyramide berechnen.

Die ägyptischen Pyramiden

Die Pyramiden dienten vom Alten bis ins Mittlere Reich als Grabstätten der Pharaonen. Noch zu Lebzeiten begannen die ägyptischen Könige mit dem Bau dieser speziellen Gräber, damit sie nach ihrem Tod ein würdiges Zuhause für die Ewigkeit hatten.

Zur Erinnerung:
$O_{Pyramide} = a^2 \cdot 2 \cdot a \cdot h_s$
$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$

Aufgabe 1

Das größte Bauwerk des antiken Ägypten war die vor etwa 4500 Jahren errichtete Cheopspyramide. Sie war ursprünglich 146 m hoch (das entspricht in etwa einem Hochhaus mit 40 Etagen). Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche betrug 230 m. Sie war einst mit matt weißen Kalksteinplatten überzogen und so spiegelglatt poliert, dass sie in der heißen Wüstensonne glitzerte.

Cheopspyramide (pixabay)

☞ Berechne die Größe der Fläche, die die Arbeiter glattpolieren mussten.

Aufgabe 2

Napoleon ließ nach einem Besuch der Pyramiden in Ägypten berechnen, dass man aus den Steinen der Cheopspyramide eine 3 m hohe und 30 cm dicke Mauer um ganz Frankreich errichten könnte.

Zur Erinnerung:
V_{Quader} = Länge · Breite · Höhe

☞ Berechne die Länge dieser Mauer und überprüfe die Aussage Napoleons.

Aufgabe 3

Die Küste von Sylt hat eine Länge von 40 km.

☞ Berechne, wie hoch ein 3 m dicker Staudamm gegen den steigenden Meeresspiegel wäre, wenn man ihn aus den Steinen der Cheopspyramide errichten würde.

Steinmauer (pixabay)

Aufgabe 4

In den letzten Jahrhunderten wurde ein großer Teil der Cheopspyramide abgetragen, um damit Gebäude in Kairo zu erbauen. Heute ist die Grundseite dementsprechend nur noch 227 m lang und die Höhe beträgt nur noch 136 m.

☞ Berechne, um wieviel Prozent das Ursprungsvolumen reduziert wurde.

Zur Erinnerung:
Prozentwert
= Grundwert · Prozentsatz

Autor: Alexander Hermann
Datum: 15.01.2016

Kompetenzbereich **4 Messen**	Lernfortschritt **LFS 11**	Materialien/Titel **Die ägyptischen Pyramiden**	**Mathematik** **M4.11**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**			**Lösung**

Aufgabe 1

Berechnung h_s:

$$h_s{}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h_s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$$

$$h_s = \sqrt{\left(\frac{230\text{ m}}{2}\right)^2 + (146\text{ m})^2}$$

$$h_s \approx 185{,}85\text{ m}$$

Berechnung M:

$$M_{\text{Pyramide}} = 2 \cdot a \cdot h_s$$

$$M_{\text{Pyramide}} = 2 \cdot 230\text{ m} \cdot 185{,}85\text{ m}$$

$$M_{\text{Pyramide}} = 85491\text{ m}^2$$

Die Fläche, die geglättet werden musste, hatte eine Größe von 85491 m^2.

Aufgabe 2

Berechnung von V_{Pyramide}:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\,a^2 \cdot h$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}\,(230\text{ m})^2 \cdot 146\text{ m}$$

$$V_{\text{Pyramide}} \approx 2\,574\,466{,}67\text{ m}^3$$

Berechnung von c:

$$V_{\text{Quader}} = a \cdot b \cdot c$$

$$c = \frac{V_{Quader}}{a \cdot b}$$

$$c = \frac{2574466{,}67\ m^3}{3\text{ m}} : 0{,}3\text{ m}$$

$$c = 2860518{,}52\text{ m} = 2860{,}51852\text{ km}$$

Die Mauer hätte eine Länge von gut 2860 km.
(www.laenderdaten.de : Grenze Frankreichs = 2889 km)

Aufgabe 3

Berechnung von c:

$$V_{\text{Quader}} = a \cdot b \cdot c$$

$$c = \frac{V_{Quader}}{a} : b = \frac{2574466{,}67\ m}{3\text{ m}} : 40\,000\text{ m}$$

$$c \approx 21{,}45\text{ m}$$

Der Staudamm um Sylt hätte eine Höhe von 21,45 m.

Aufgabe 4

Berechnung $V_{\text{Pyramide neu}}$:

$$V_{\text{Pyramide neu}} = \frac{1}{3}\,a^2 \cdot h = \frac{1}{3}\,(227\text{ m})^2 \cdot 136\text{ m}$$

$$V_{\text{Pyramide neu}} \approx 2\,335\,981{,}33\text{ m}^3$$

Differenz:

$V_{\text{Diff.}} = V_{\text{Pyramide alt}} - V_{\text{Pyramide neu}} = 2\,574\,466{,}67\text{ m}^3 - 2\,335\,981{,}33\text{ m}^3$

$V_{\text{Diff.}} = 238\,485{,}34\text{ m}^3$

Bestimmung Prozentsatz:

$$p\% = \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}} = \frac{238485{,}34\text{ m}^3}{2574466{,}67\text{ m}^3} = 9{,}26\ \%$$

Es gingen 9,26 % des ursprünglichen Volumens verloren.

Autor: Alexander Hermann
Datum: 15.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 11**	**Die Glaspyramiden des Louvre**

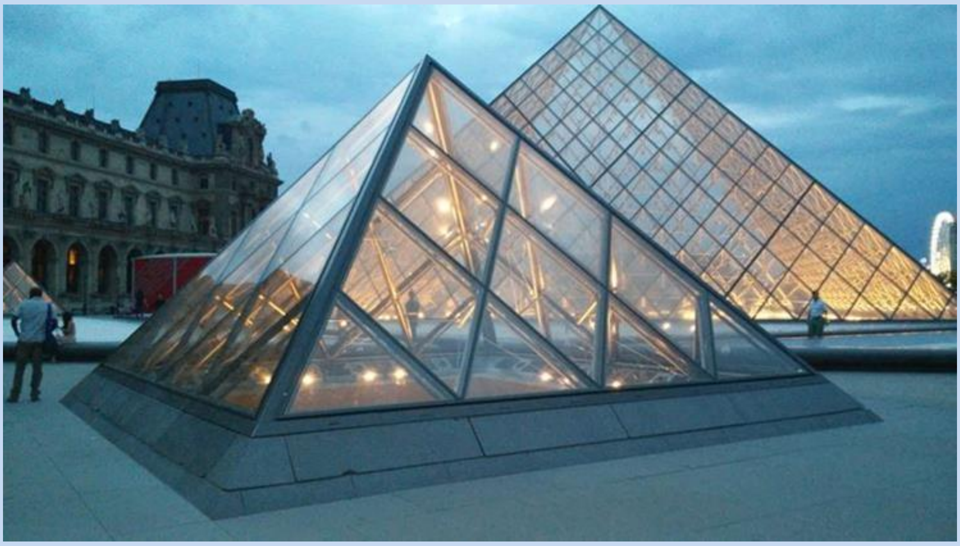
Kompetenz

- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**

Mathematik
M4.11

Lernthema

Die Glaspyramiden des Louvre



Bezug zu Teilkompetenzen

M4.11.02

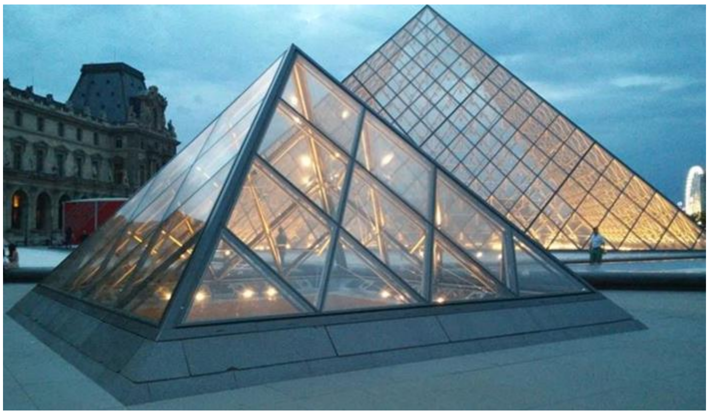
Ich kann anhand von Grundkantenlänge und Seitenhöhe den Oberflächeninhalt einer quadratischen Pyramide berechnen.

M4.11.05

Ich kann anhand der Grundkantenlänge und der Höhe das Volumen einer quadratischen Pyramide berechnen.

M5.12.05

Ich kann Streckenlängen wie Höhen oder Seitenhöhen in Körpern mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen.



Die Glaspyramiden des Louvre in Paris

Die große quadratische Glaspyramide des Louvre in der französischen Hauptstadt Paris dient als Eingang zum größten Museum der Welt, dessen berühmtestes Gemälde das Portrait der Mona Lisa ist.

Aufgabe 1

Bei einer Besichtigung fragt eine Besucherin den Fremdenführer, wie viel m^3 Luft in die Pyramide passen. Der Fremdenführer kann so schnell keine Antwort geben.
Welche Antwort würdest du nach einer Berechnung vorschlagen?

☞ Berechne das Volumen.

Aufgabe 2

Neben der großen Glaspyramide stehen noch weitere, kleine Glaspyramiden.
Wie viel m^3 Luft passen wohl in eine solche kleine Pyramide?

☞ Schätze die Höhe und Breite der Pyramide. Begründe deine Schätzung.

☞ Berechne das Volumen.

☞ Berechne, wie oft die kleine Pyramide in die große hineinpassen würde.

Aufgabe 3

Die vier Seitenflächen beider Pyramiden bestehen überwiegend aus Glas.

☞ Bestimme die Größe der gesamten Glasfläche der beiden Pyramiden.

Aufgabe 4

Die Glasscheiben, aus denen die Seitenflächen bestehen, haben die Form von Rauten und gleichschenkligen Dreiecken.

a) Einem Verschwörungsmythos folgend wird in einem Buch von Dan Brown behauptet, dass die Zahl der Glasplatten der großen Pyramide 666 beträgt. Tatsächlich sind es 603 Rauten und 70 Dreiecke aus Glas, wobei die Rautenflächen doppelt so groß sind wie die dreieckigen Flächen.

☞ Bestimme die Fläche einer Glasraute und eines Glasdreiecks.

b) Welche verschiedenen Möglichkeiten gibt es zur Flächenbestimmung? Welche wählst du aus?

☞ Begründe, welche Möglichkeit dir am sinnvollsten erscheint.

c) In einem Zeitungsartikel wurde behauptet, dass fast 90 Tonnen Glas verbaut wurden. Stimmt das?

☞ Begründe deine Meinung mit einer Rechnung.

Pyramide des Louvre	
erbaut	1985 - 1989
Architekt	Ieoh Ming Pei
Technische Informationen	
Baustoffe	
innere Rahmenkonstruktion	Stahl
Fassade	Glas
Abmessungen und andere Zahlen	
Länge der Grundseite	35,42 m
Höhe	21,65 m
Neigungswinkel der Glasflächen	51,52°
Glasdicke	21 mm
Masse	1 m^3 wiegt 2,2t
Gesamtgewicht	ca. 180 t

Volumen einer Pyramide: M4.11.05

Oberfläche einer Pyramide: M4.11.02

Autoren:
Christine Fürch,
Andreas von Scholz
Datum: 24.10.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 11**	**Die Glaspyramiden des Louvre**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**		

Mathematik
M4.11

Lösung

Aufgabe 1

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (35{,}42 \text{ m})^2 \cdot 21{,}65 \text{ m} \approx 9053{,}86 \text{ m}^3$$

Es passen etwa 9054 m^3 Luft in die Pyramide.

Aufgabe 2

Maße der kleinen Pyramide:
Länge der Grundseite der kleinen Pyramide:
Die Länge der Grundseite der großen Pyramide beträgt 35,42 m. Sie wird aus der Grundseite von 18 Dreiecken gebildet. Eine Grundseite eines Dreiecks hat damit eine Länge von 35,42 m : 18 ≈ 1,97 m.
Die Grundseite der kleinen Pyramide besteht aus 4 Dreiecken. Sie ist demnach (ohne Steinsockel) 4 · 1,97 m = **7,88 lang**.

Die Höhe der Pyramide (wieder ohne Sockel) kann über die Körpergröße der Personen geschätzt werden. Eine Person ist etwa 1,80 m groß. Die Körpergröße passt gut zweieinhalbmal in die Pyramidenhöhe. Damit wäre die **Pyramidenhöhe** etwas mehr als 2,5 · 1,80 m = **4,50 m.**

Genauer kann man die Pyramidenhöhe über ihre Seitenhöhe berechnen.
Die Seitenhöhe $h_{s\text{-klein}}$ entspricht viermal der Höhe eines der Glasdreiecke.

Seitenhöhe der großen Pyramide $h_{s\text{-groß}}$:

Wegen $h_s{}^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

ist $h_{s\text{-groß}} = \sqrt{(21{,}65 \text{ m})^2 + (35{,}42 \text{ m} : 2)^2} \approx 29{,}97$ m.

Höhe eines Glasdreiecks: $h_\Delta \approx 29{,}97 \text{ m} : 18 \approx 1{,}55$ m

$h_{s\text{-klein}} = 4 \cdot h_\Delta \approx 6{,}20$ m

Damit erhält man $\mathbf{h_{klein}} = \sqrt{(6{,}20 \text{ m})^2 - (7{,}88 \text{ m} : 2)^2}$ **≈ 4,79 m**

Volumen der kleinen Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (7{,}88 \text{ m})^2 \cdot 4{,}79 \text{ m} \approx 99{,}14 \text{ m}^3$$

Es passen **etwa 108 m^3 Luft** in die kleine Pyramide.

Wegen $9053{,}86\, m^3 : 99{,}14\, m^3 \approx 91{,}3$ passt die kleine Pyramide **gut 90-mal** in die große Pyramide.

Aufgabe 3

Seitenhöhe der großen Pyramide (s. o.):

$h_{s\text{-groß}} = \sqrt{(21{,}65\text{ m})^2 + (35{,}42\text{ m} : 2)^2} \approx 29{,}97\text{ m}$

Seitenhöhe der kleinen Pyramide:

$h_{s\text{-klein}} = 4 \cdot h_{\Delta} \approx 6{,}20\text{ m}$

Größe der vier Seitenflächen der großen Pyramide:

$$4 \cdot A_{\text{Dreieck}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_{\text{große Pyramide}} \cdot h_{\text{s gr Pyr}} = 2 \cdot 35{,}42\text{ m} \cdot 27{,}97\text{ m}$$
$$\approx 1981{,}4\text{ m}^2$$

Größe der vier Seitenflächen der kleinen Pyramide:

$$4 \cdot A_{\text{Dreieck}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_{\text{kleine Pyramide}} \cdot h_{\text{s kl Pyr}} = 2 \cdot 7{,}88\text{ m} \cdot 6{,}20\text{ m}$$
$$\approx 97{,}71\text{ m}^2$$

Aufgabe 4

a) und b)

1. Möglichkeit
Große Pyramide
603 Rauten und 70 Dreiecke
Jede Raute ist so groß wie zwei Dreiecke, d. h. die Glasfläche entspricht der Fläche von 603 + 35 = 638 Rauten.
Fläche einer Raute: 1981,4 m^2 : 638 ≈ **3,11 m^2**
Die Rauten haben eine Glasfläche von etwa 3,1 m^2. Damit hat eine Dreiecksfläche die Größe von ca. 1,55 m^2

2. Möglichkeit
Wie in Aufgabe 2 berechnet man für Höhe eines Glasdreiecks $h_{\Delta} \approx$ 29,97 m : 18 ≈ 1,55 m und für die Breite eines Glasdreiecks b = 35,42 m : 18 ≈ 1,97 m.
Für die Fläche der Raute ergibt sich:

$A_{\text{Raute}} = 1{,}97\text{ m} \cdot 1{,}55\text{ m} \approx \mathbf{3{,}05\text{ m}^2}$

bzw. 1,525 m^2 für die Dreiecksfläche.

c) Das Glas ist 21 mm dick. Für die Gesamtglasfläche der großen Pyramide ergibt sich als Glasvolumen: 1981,4 m^2 · 0,021 m = 41,61 m^3
1 m^3 Glas wiegt etwa 2,2 t.
Daraus folgt für das Gewicht: 41,61 m · 2,2 t = 91,5 t.
Da noch das Volumen der Streben der Stahlkonstruktion abgezogen werden müsste, ist das Glasvolumen und entsprechend des Gewicht wohl etwas geringer. **Die Behauptung stimmt** also.

Autoren:
Christine Fürch
Andreas von Scholz
Datum: 24.10.2015

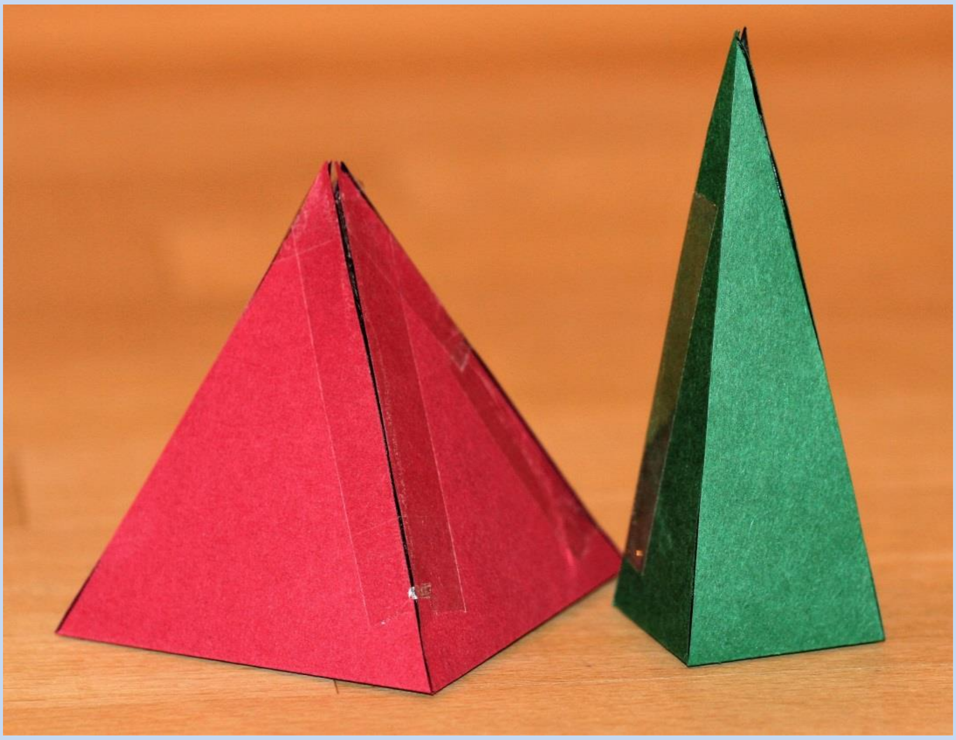
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 11**	**Die größte Pyramide**

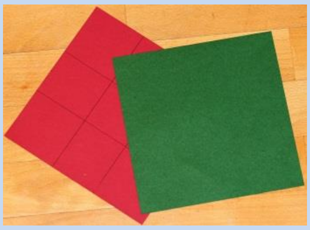
Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**

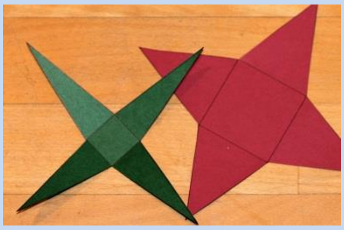
Mathematik
M4.11

Lernthema

Wer baut die größte Pyramide?







Bezug zu Teilkompetenzen

M4.11.05
Ich kann anhand der Grundkantenlänge und der Höhe das Volumen einer quadratischen Pyramide berechnen.

M5.08.04
Ich kann anhand von Längenangaben Netze zu Pyramiden zeichnen.

M5.08.01/02
Ich kann Körpernetze und daraus Körpermodelle erstellen.

M4.11.08
Ich kann die Höhe einer quadratischen Pyramide mit bekannter Grundkantenlänge berechnen, wenn ihre Seitenhöhe gegeben ist.

M5.12.05
Ich kann Streckenlängen wie Höhen oder Seitenhöhen in Körpern mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen.

Wer baut die Pyramide mit dem größten Volumen?

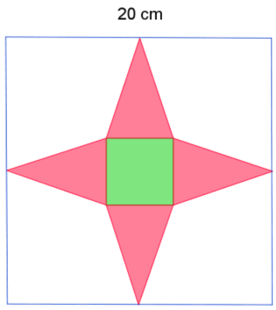
Nimm dir ein quadratisches Tonpapier mit einer Seitenlänge von 20 cm. Baue daraus ein möglichst großes Modell einer quadratischen Pyramide.

Aufgabe 1

Überlege, mit welchem sternförmigen Netz man aus dem Tonpapierquadrat das Pyramidenmodell mit dem größten Volumen bauen kann.

☞ Zeichne das entsprechende Netz und baue das Modell.

☞ Berechne das Volumen deiner Pyramide.



Aufgabe 2

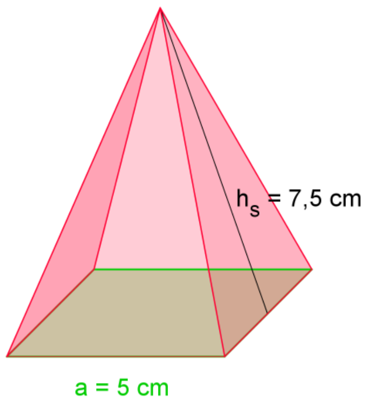
Bestimme für die Modelle deiner Mitschülerinnen und Mitschüler jeweils die Länge der Grundseite und die Höhe der Seitenfläche. Berechne die Pyramidenhöhe.
Damit kannst du das Volumen der einzelnen Pyramiden berechnen.

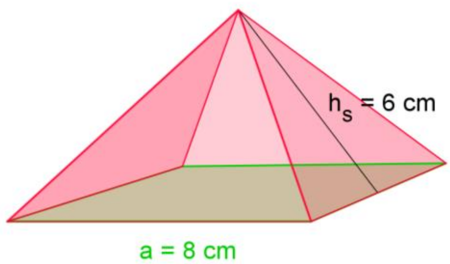
Die Pyramidenhöhe kannst du mit dem Satz des Pythagoras berechnen und durch Messung am Modell überprüfen.

☞ Trage die gemessenen und errechneten Maße in die Tabelle ein.

	Modell 1	Modell 2	Modell 3	Modell 4	Modell 5
Seitenlänge a					
Seitenhöhe h_s					
Pyramidenhöhe h					
Grundfläche A					
Volumen V					

☞ Formuliere, was du im Vergleich der Modelle feststellen kannst.





Aufgabe 3

Überlege gemeinsam mit einer Lernpartnerin / einem Lernpartner, ob ihr tatsächlich die Pyramide mit dem größten Volumen gefunden habt.

☞ Findet das Netz, das zur Pyramide mit dem größten Volumen führt und begründet eure Behauptung.

☞ Prüft nach, ob es andere Netzformen gibt, mit denen man noch größere Pyramidenmodelle erstellen kann.

Du kannst eine Behauptung z. B. begründen durch:
verschiedene Beispiele, systematisches Ausprobieren, …

Autoren:
Christine Fürch
Andreas von Scholz
Datum: 12.10.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	
4 Messen	**LFS 11**	**Die größte Pyramide**	**Mathematik M4.11**
Kompetenz - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**			**Lösung**

Aufgabe 1

Individuelle Lösungen.
Zum Netz vgl. die Abbildung auf dem Arbeitsblatt.
Zum Volumen vgl. die Lösungen zu Aufgabe 2.

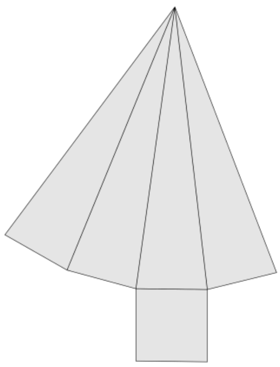
Aufgabe 2

	Modell 1	Modell 2	Modell 3	Modell 4	Modell 5
Seitenlänge a	3 cm	4 cm	5 cm	6 cm	7 cm
Seitenhöhe h_s	8,5 cm	8 cm	7,5 cm	7 cm	6,5 cm
Pyramidenhöhe h	8,36 cm	7,74 cm	7,07 cm	6,32 cm	5,48 cm
Grundfläche A	9 cm^2	16 cm^2	25 cm^2	36 cm^2	49 cm^2
Volumen V	25,08 cm^3	41,28 cm^3	58,91 cm^3	75,84 cm^3	89,50 cm^3

	Modell 6	Modell 7	Modell 8	Modell 9	Modell 10
Seitenlänge a	7,5 cm	7,8 cm	8 cm	9 cm	9,5 cm
Seitenhöhe h_s	6,25 cm	6,1 cm	6 cm	5,5 cm	5,25 cm
Pyramidenhöhe h	5 cm	4,69 cm	4,47 cm	3,16 cm	2,23 cm
Grundfläche A	56,25 cm^2	60,84 cm^2	64 cm^2	81 cm^2	90,25 cm^2
Volumen V	93,75 cm^3	95,11 cm^3	95,36 cm^3	85,32 cm^3	67,08 cm^2

Je länger die Seitenlänge a, desto größer wird das Volumen. Ab etwa 8 cm Seitenlänge für die Grundkante wird das Volumen allerdings wieder kleiner. Nun gilt: Je spitzer die Pyramide, also je höher die Pyramide und je kürzer die Seitenlänge a, desto kleiner wird das Volumen.

Aufgabe 3



Durch systematisches Ausprobieren stellt man fest, dass das größte Volumen bei etwa 8 cm Kantenlänge erreicht wird (siehe Aufgabe 2). Bei 7,9 cm erhält man als Höhe 4,58 cm und damit V = 95,28 cm^3; bei 8,1 cm beträgt die Höhe 4,36 cm und das Volumen 95,35 cm^3. Weiteres Annähern führt zu dem Schluss: Das Maximum erhält man bei exakt 8 cm.

Mit anderen Netzformen lassen sich wesentlich größere Pyramiden herstellen.
So erhält man bspw. mit dem hier abgebildeten Netz und einer Kantenlänge von 6 cm sowie einer Seitenhöhe von 14 cm eine Pyramide mit Höhe 13,7 cm und dem Volumen $V = \frac{1}{3} \cdot 36\ cm^2 \cdot 13{,}7\ cm = 493{,}2\ cm^3$.
Und es geht noch größer.

Autoren:
Christine Fürch
Andreas von Scholz
Datum: 12.10.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 11**	**Die Schultüte (E)**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**

Mathematik
M4.11

Lernthema

Die Schultüte

Abb.: Schultüte © Alexander Hermann

Bezug zu Teilkompetenzen

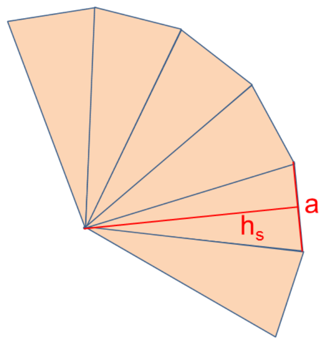
M4.11.10

Ich kann das Volumen nicht-quadratischer Pyramiden berechnen.

M4.11.11

Ich kann die Oberfläche von nicht-quadratischen Pyramiden berechnen.

Die Schultüte



Traditionell erhalten die ABC-Schützen zur Einschulung eine Schultüte, gefüllt mit Süßigkeiten und anderen Utensilien. Häufig werden Sie von den Eltern der Kinder selbst gebastelt und haben, damit sie stabiler sind, die Form einer **Sechseckpyramide**. Hier siehst du eine entsprechende Vorlage.

Aufgabe 1

Entwirf eine eigene kleine Schultüte aus einem DIN A 3-Blatt.

☞ Wähle sinnvolle Maße für die Grundkantenlänge a und die Seitenhöhe h_s.

☞ Berechne die Größe der Fläche, die dekoriert werden muss.

Aufgabe 2

Hendrik hat zur Einschulung eine Schultüte von seiner Mutter gebastelt bekommen. Es ist $h_s = 68$ cm und $a = 12$ cm.

☞ Berechne, wie groß die Fläche ist, die seine Mutter dekorieren muss.

Aufgabe 3

Die Schultüte war mit Süßigkeiten und kleinen Geschenken gefüllt. Je größer die Schultüte ist, desto mehr Süßigkeiten und Geschenke passen hinein. Wieviel passte in seiner Schultüte?

☞ Berechne das Volumen seiner Schultüte.

Aufgabe 4

Die kleine Schwester Hannah bekam eine Geschwistertüte. Solche kleinen Schultüten erhalten Bruder und Schwester oft, um den Schmerz beim Anblick des reich beschenkten Schulkindes zu lindern.
Die Tüte hat eine Seitenkante mit einer Länge von 34 cm und eine Grundkante mit der Länge 6 cm.
Hannah behauptet die Schultüte ihres Bruders sei doppelt so groß wie ihre.

☞ Überprüfe ihre Behauptung durch eine Rechnung.

☞ **Zusatz:** Berechne, in welcher Höhe man die Schultüte ihres Bruders abschneiden müsste, damit ihr Volumen doppelt so groß wäre.

Autor: Alexander Hermann
Datum: 15.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 11**	**Die Schultüte (M)**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**

Mathematik
M4.11

Lernthema

Die Schultüte

Abb.: Schultüte © Alexander Hermann

Bezug zu Teilkompetenzen

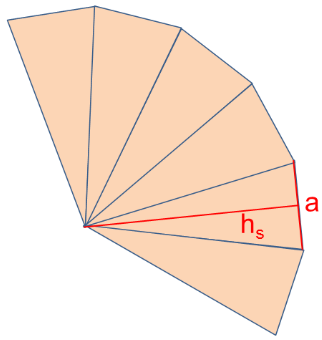
M4.11.10

Ich kann das Volumen nicht-quadratischer Pyramiden berechnen.

M4.11.11

Ich kann die Oberfläche von nicht-quadratischen Pyramiden berechnen.

Die Schultüte



Traditionell erhalten die ABC-Schützen zur Einschulung eine Schultüte, gefüllt mit Süßigkeiten und anderen Utensilien. Häufig werden Sie von den Eltern der Kinder selbst gebastelt und haben, damit sie stabiler sind, die Form einer **Sechseckpyramide**. Hier siehst du eine entsprechende Vorlage.

Aufgabe 1

Entwirf eine eigene kleine Schultüte aus einem DIN A 3-Blatt.

☞ Wähle sinnvolle Maße für die Grundkantenlänge a und die Seitenhöhe h_s.

Wie groß ist die Fläche, die dekoriert werden muss?

☞ Berechne die Mantelfläche aus den sechs Teildreiecken.

Aufgabe 2

Hendrik hat zur Einschulung eine Schultüte von seiner Mutter gebastelt bekommen. Es ist $h_s = 68$ cm und $a = 12$ cm.

☞ Berechne, wie groß die Fläche ist, die seine Mutter dekorieren muss.

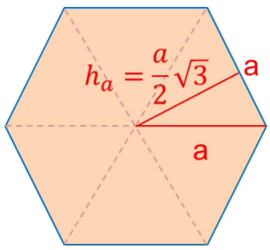
Aufgabe 3

Die Schultüte war mit Süßigkeiten und kleinen Geschenken gefüllt. Je größer die Schultüte ist, desto mehr Süßigkeiten und Geschenke passen hinein.

☞ Berechne zunächst den Inhalt der sechseckigen Grundfläche der Pyramide.

☞ Berechne dann das Volumen seiner Schultüte.

Zur Erinnerung:
$A_{Sechseck}$
$= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a$



Aufgabe 4

Die kleine Schwester Hannah bekam eine Geschwistertüte. Solche kleinen Schultüten erhalten Bruder und Schwester oft, um den Schmerz beim Anblick des reich beschenkten Schulkindes zu lindern.
Die Tüte hat eine Seitenkante mit einer Länge von 34 cm und eine Grundkante mit der Länge 6 cm.
Hannah behauptet die Schultüte ihres Bruders sei doppelt so groß wie ihre.

☞ Berechne das Volumen ihrer Schultüte wie in Aufgabe 3.

☞ Vergleiche die Volumina und überprüfe ihre Behauptung.

Autor: Alexander Hermann
Datum: 15.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	
4 Messen	**LFS 11**	**Die Schultüte (M / E)**	**Mathematik M4.11**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.**			**Lösung**

Aufgabe 1

Individuelle Lösungen

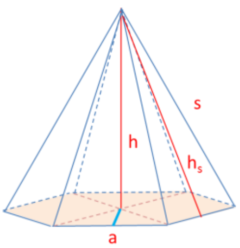
Aufgabe 2

$$M = 3 \cdot a \cdot h_s$$
$$M = 3 \cdot 12\ \text{cm} \cdot 68\ \text{cm}$$
$$M = 2448\ \text{cm}^2$$

Die Fläche, die dekoriert werden muss, hat eine Größe von ca. 2450 cm^2

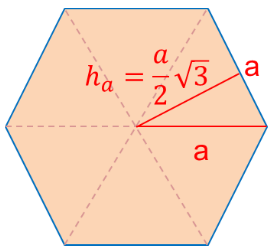
Aufgabe 3

Das **Volumen** einer **Sechseckpyramide** lässt sich berechnen:



Volumen:

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot h$$



Zur Erinnerung:
A_{Sechseck}
$= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a$

Berechnung von h

$$h_s^2 = h_a^2 + h^2$$

$$h = \sqrt{h_s^2 - h_a^2}$$

$$h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{(68\ \text{cm})^2 - \left(\frac{12\ \text{cm}}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2}$$

$$h \approx 66{,}39\ \text{cm}$$

Berechnung von V_{Pyramide}

$$V = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot (12\ \text{cm})^2 \cdot 66{,}39\ \text{cm}$$

$$V = 8279{,}34\ \text{cm}^3$$

Die Schultüte von Hendrik hat ein Volumen von ca. 8280 cm^3.

Aufgabe 4

Berechnung von h:

$s^2 = a^2 + h^2$

$h = \sqrt{s^2 - a^2}$

$h = \sqrt{(34\text{ cm})^2 - (6\text{ cm})^2}$

$h \approx 33{,}47\text{ cm}$

Berechnung von V_{Hannah}:

$V_{Hannah} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 \cdot h$

$V_{Hannah} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot (6\text{ cm})^2 \cdot 33{,}47\text{ cm}$

$V_{Hannah} \approx 1043{,}49\text{ cm}^3$

Die Schultüte von Hendrik hat ein Volumen von 8279,34 cm^3.
Die Schultüte von Hannah hat ein Volumen von 1043,49 cm^3.

Das Volumen der Schultüte von Hendrik ist weitaus mehr als doppelt so groß wie das Volumen der Schultüte seiner Schwester.

Mit dem 1. Strahlensatz gilt: $\frac{a_{alt}}{h_{alt}} = \frac{a_{neu}}{h_{neu}}$ bzw. $\frac{a_{alt} \cdot h_{neu}}{h_{alt}} = a_{neu}$

$\frac{12\text{ cm} \cdot h_{neu}}{66{,}39\text{ cm}} = a_{neu}$

$a_{neu} = 0{,}18 \cdot h_{neu}$

Zusatz (Niveau E):

Berechnung von h:

Wegen $V = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 \cdot h$ bzw. $2086{,}98\text{ cm}^3 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot (0{,}18\text{ h})^2 \cdot h$ gilt:

$\frac{2 \cdot 2086{,}98\text{ cm}^3}{\sqrt{3} \cdot 0{,}18^2} = h^3$ bzw. $h \approx 42{,}05$ cm.

Die Schultüte von Hendrik müsste in einer Höhe von ca. 42 cm abgeschnitten werden.

Autor: Alexander Hermann
Datum: 15.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Alles Käse!**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**

Mathematik
M4.10

Lernthema

Alles Käse!

Bezug zu Teilkompetenzen

M5.08.02/04
Ich kann anhand von Längenangaben Netze zu Prismen zeichnen und Körpernetze erstellen.

M5.08.06
Ich kann vorgegebene Körper wie beispielsweise Verpackungen in Einzelflächen zerlegen und diese beschreiben.

M5.08.11
Ich kann Körper in Ansichten erkennen und sie benennen.

M4.10.01
Ich kann aus einem Prismenmodell oder Prismennetz Maße entnehmen und anhand der Teilflächen den Inhalt der Mantelfläche und der Oberfläche des Prismas bestimmen.

M4.10.03
Ich kann den Oberflächeninhalt von Prismen bestimmen.

M4.10.05
Ich kann das Volumen eines Prismas bestimmen.

M4.10.09
Ich kann den Oberflächeninhalt von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.

M4.10.11
Ich kann das Volumen von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.

Alles Käse

Aufgabe 1

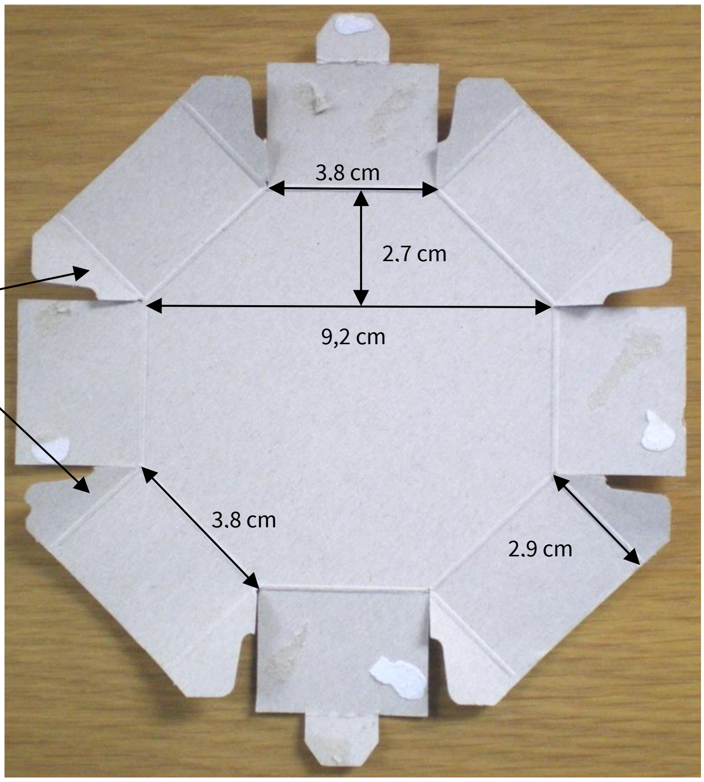
a) Welche geometrische Form hat die Käseverpackung

☞ Notiere die Form:

____

b) Zeichne den aufgeklappten Deckel in Originalgröße auf kariertes Papier. Lass dabei die Klebefalze weg.

☞ Zeichne den Deckel und schneide ihn aus.



Welche Form haben die einzelnen Teilflächen?

☞ Beschrifte in deiner Zeichnung die Teilflächen.

c) Wie viel Karton wird für eine Verpackung aus Deckel und Schachtel mindestens benötigt, wenn die Klebefalze nicht berücksichtigt werden?

☞ Schreibe eine übersichtliche Rechnung auf und berechne den Flächeninhalt.

Aufgabe 2

Hier siehst du die Lösung, die Esra zu Aufgabe 1 erstellt hat.

a) Was hat sie genauso gelöst wie du?

☞ Notiere Gemeinsamkeiten.

b) Was hat sie anders gemacht als du?

☞ Notiere die Unterschiede.

c) Wo hat Esra bei den Begriffen, Maßeinheiten und Rechenzeichen etwas nachlässig gearbeitet?

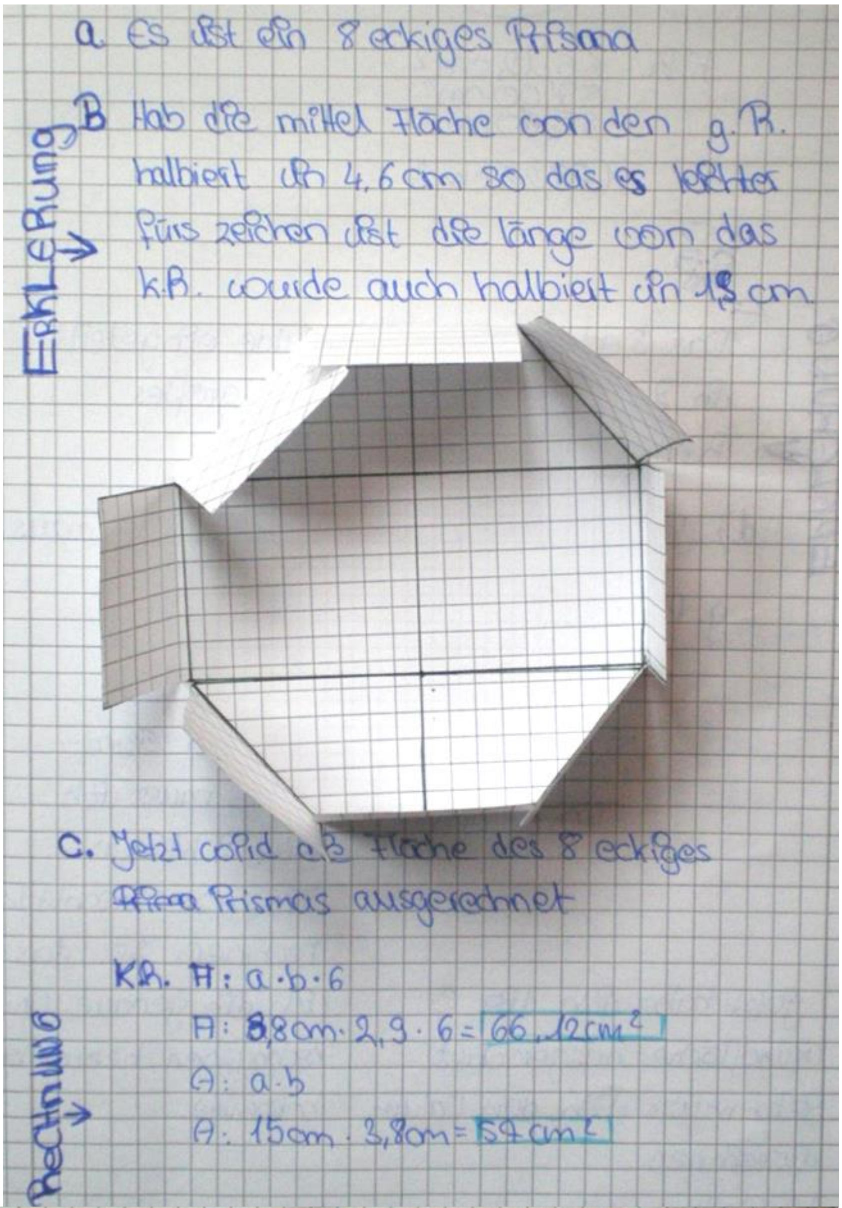
☞ Korrigiere die entsprechenden Fehler.

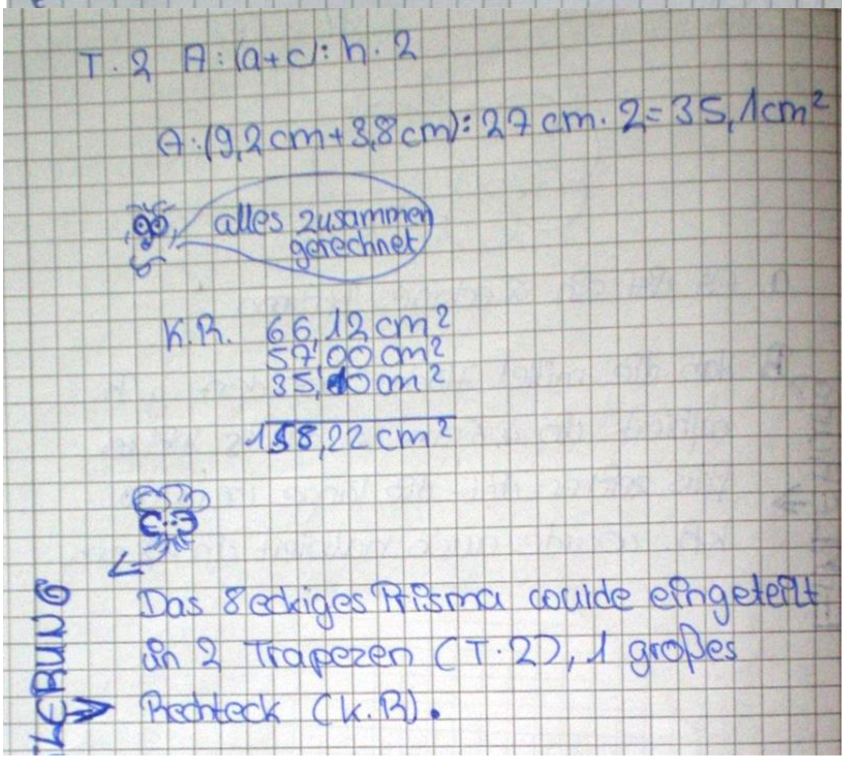
In dem Text sind auch Rechtschreib- und Grammatikfehler enthalten.

☞ Verbessere auch diese Fehler.

d) Was findest du an Esras Lösung interessant? Warum?

☞ Notiere, was du an dieser Lösung interessant findest.





Aufgabe 3

Käse, der in solchen Verpackungen verkauft wird, hat meist eine zylindrische Form.

a) Welches Volumen kann ein zylinderförmiger Käse höchstens haben, damit er noch in diese Packung passt?

☞ Ermittle die maximalen Maße und berechne das Volumen des Käses.

b) Dieser Käse soll passgenau in Folie verpackt werden. Wie groß muss die Folie mindestens sein?

☞ Berechne die Größe der Folie.

Zylinder:
Volumen: M4.10.11
Oberfläche: M4.10.09

Aufgabe 4

Bei einem zylinderförmigen Käse wird nicht die ganze Käseschachtel mit Käse ausgefüllt.
Wie groß ist das ungenutzte Volumen, in dem sich nur Luft befindet?

☞ Berechne den Anteil dieses ungenutzten Verpackungsraums am Volumen der gesamten Käseschachtel.

Prismenvolumen: M4.10.05

Autoren:
Christine Fürch
Andreas von Scholz
Datum: 25.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Alles Käse!**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**		

Mathematik
M4.10

Lösung

Aufgabe 1

a) Form: achteckiges Prisma

b) Vergleiche mit dem Foto in Aufgabe 2.
Es sind acht Rechtecke und ein Achteck.

c) Ergebnis:
Für den Deckel benötigt man **158,22 cm²** Karton.
Für die Schachtel benötigt man **316,44 cm²** Karton.

$$A_{\text{Grundfläche}} = 2 \cdot A_{\text{Trapez}} + A_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot \frac{a + c}{2} \cdot h_{\text{Trapez}} + a \cdot b$$
$$= 2 \cdot \frac{9{,}2\text{ cm} + 3{,}8\text{ cm}}{2} \cdot 2{,}7\text{ cm} + 9{,}2\text{ cm} \cdot 3{,}8\text{ cm}$$
$$= 35{,}1\text{ cm}^2 + 34{,}96\text{ cm}^2 = 70{,}06\text{ cm}^2$$
$$A_{\text{Mantel}} = 8 \cdot A_{\text{Kleines Rechteck}} = 8 \cdot c \cdot d = 8 \cdot 3{,}8\text{ cm} \cdot 2{,}9\text{ cm} = 88{,}16\text{ cm}^2$$
$$A_{\text{Deckel}} = 70{,}06\text{ cm}^2 + 88{,}16\text{ cm}^2 = 158{,}22\text{ cm}^2$$

Für die gesamte Schachtel braucht man zwei solche „Deckel“, also insgesamt 316,44 cm² Karton.

Aufgabe 2

a) Individuell

b) Individuell
z. B. Esra hat die achteckige Fläche in zwei Trapeze und ein Rechteck zerlegt. Man könnte hier auch in Dreiecke und Rechtecke zerlegen. Auch hierfür gibt es mehrere unterschiedliche Zerlegungsmöglichkeiten.
Außerdem hat sie das Rechteck in der Mitte sehr groß gewählt, weil sie die beiden kleinen Seitenrechtecken der Mantelfläche gleich dazu genommen hat. Deshalb addiert sie nur sechs kleine Rechtecke für die restliche Mantelfläche.

c) Esra hat bei ihrer Lösung in Teilaufgabe c) das Wort „Prisma“ verwendet. Sie berechnet aber eine Fläche. Deshalb muss es hier „Achteck“ heißen. Esra verwechselte Körper mit Flächen.
Außerdem hat Esra etwas unsauber gemessen und gezeichnet. Ihr mittleres Rechteck hat nur eine Breite von ca. 8,7 cm anstatt 9,2 cm.
Statt eines Gleichheitszeichens verwendet sie einen Doppelpunkt. In einzelnen Rechnungen fehlt die Maßeinheit.
Bei der Berechnung der Trapezfläche muss die Summe der beiden Seitenlängen durch 2 dividiert und dies mit der Höhe h multipliziert werden. Sie schreibt das genau verkehrt herum hin, rechnet aber wohl richtig. Denn als Ergebnis für beide Trapeze erhält sie den richtigen Flächeninhalt. Da es zwei Trapeze sind, multipliziert sie wohl am Ende mit zwei, schreibt dies aber nicht auf.

Mögliche Korrektur:

A: Der Körper ist ein 8-eckiges Prisma.

B (Erklärung): Ich habe die mittlere Fläche mit dem großen Rechteck durch eine Mittellinie halbiert in jeweils 4,6 cm Breite, so dass es leichter zu zeichnen ist. Die Länge des kleinen Rechtecks wurde auch halbiert in 1,9 cm.

C: Jetzt werden die Grundfläche und die Mantelfläche für die Berechnung der Fläche des Netzes ausgerechnet.

6 kleine Rechtecke	$6 \cdot A_1 = 6 \cdot a \cdot b = 6 \cdot 9{,}8\text{ cm} \cdot 2{,}9\text{ cm} = 66{,}12\text{ cm}^2$
Großes Rechteck	$A_2 = a \cdot b = 15\text{ cm} \cdot 3{,}8\text{ cm} = 57\text{ cm}^2$
2 Trapeze	$2 \cdot A_T = 2 \cdot (a + c) : 2 \cdot h = (9{,}2\text{ cm} + 3{,}8\text{ cm}) \cdot 2{,}7\text{ cm} = 35{,}1\text{ cm}^2$

Wird alles zusammen gerechnet, erhält man für die Oberfläche:
$66{,}12\text{ cm}^2 + 57\text{ cm}^2 + 35{,}1\text{ cm}^2 = 158{,}22\text{ cm}^2$
Die Oberfläche des 8-eckigen Prismas wurde eingeteilt in 2 Trapeze ($2 \cdot A_T$), ein großes Rechteck mit a = 15 cm und b = 3,8 cm (A_1) und in sechs kleine Rechtecke mit a = 3,8 cm und b = 2,9 cm ($6 \cdot A_2$).

d) Individuell.
z. B. Esra hat die Grundfläche ungewöhnlich zerlegt. Sie hat ein großes Rechteck daraus gemacht und dabei schon einen Teil der Mantelfläche gleich mit berechnet.
Außerdem rechnet sie mit den beiden Trapezflächen. Man könnte auch vom Mittelpunkt in acht (gleichseitige) Dreiecke (Grundfläche) und acht Rechtecke (Mantelfläche) zerlegen.

Aufgabe 3

a) Durchmesser: ca. 9 cm, Radius r = 4,5 cm
Höhe der Schachtel: 2,9 cm, Höhe des Käse etwa h = 2,7 cm
Zylindervolumen

$$V = G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$= \pi \cdot 20{,}25\text{ cm}^2 \cdot 2{,}7\text{ cm} \approx \mathbf{171{,}8\text{ cm}^3}$$

b) Oberfläche der Folie

$$O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$
$$= 2 \cdot \pi \cdot 20{,}25\text{ cm}^2 + 2 \cdot \pi \cdot 4{,}5\text{ cm} \cdot 2{,}7\text{ cm} \approx \mathbf{203{,}6\text{ cm}^2}$$

Aufgabe 4

Volumen der Schachtel:
$$V = G \cdot h = 70{,}06\text{ cm}^2 \cdot 2{,}9\text{ cm} = 203{,}3\text{ cm}^3$$

Volumen Käse:
$$V = 171{,}8\text{ cm}^3$$

Ungenutztes Volumen:
Differenz: $31{,}5\text{ cm}^3$
Anteil: $\frac{31{,}5\text{ cm}^3}{171{,}8\text{ cm}^3} \approx \mathbf{18{,}3\ \%}$

Autoren:
Christine Fürch
Andreas von Scholz
Datum: 25.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Backen (E)**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**

Mathematik
M4.10

Lernthema

Backen

Bezug zu Teilkompetenzen

M4.10.04

Ich kann das Volumen von Prismen mit viereckiger Grundfläche berechnen.

M4.10.02

Ich kann den Oberflächeninhalt von Prismen mit viereckiger Grundfläche berechnen.

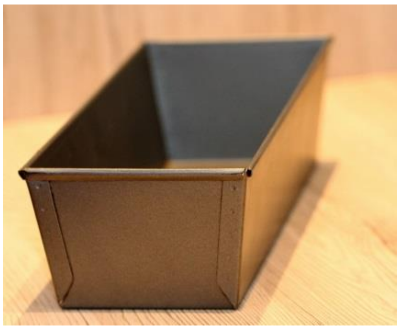
M5.12.05

Ich kann Streckenlängen wie Höhe oder Seitenhöhen in Körpern mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen.

M4.10.11

Ich kann das Volumen von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.

Aufgabe 1



In den Teig für einen Marmorkuchen gibt man Backpulver, in dem Natron enthalten ist. Dieses bildet aufgrund der Flüssigkeit im Teig und der Hitze im Backofen beim Backen Kohlendioxid. Aufsteigende Gasbläschen sorgen dafür, dass der Teig locker wird und das Volumen zunimmt.

a) Um wie viel Prozent darf das Volumen eines Teiges von 1,7 Litern maximal zunehmen, damit der Kuchen noch in eine solche 8 cm hohe und 29 cm lange Kastenform passt, die oben 11 cm und unten 9 cm breit ist?

☞ Ermittle die maximal mögliche prozentuale Zunahme.

Die Kuchenform ist näherungsweise prismenförmig.

b) Der Kuchenteig geht beim Backen so weit auf, dass der Kuchen am Ende genau die Form ausfüllt. Der Kuchen soll nun mit einer Schokoladenglasur überzogen werden.

☞ Bestimme die Größe der gesamten Fläche, die glasiert werden soll.

Aufgabe 2

Eine Rohrboden-Backform hat vereinfacht die Form eines zylinderförmigen Rings mit einer Höhe von 9 cm, einem Außendurchmesser von 24 cm und einem Innendurchmesser von 6 cm.

☞ Bestimme das Füllvolumen der Backform.

Abb.: Backform mit Rohrboden

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 30.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Backen (GM)**

Kompetenz

- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**

Mathematik
M4.10

Lernthema

Backen

Bezug zu Teilkompetenzen

M4.10.04

Ich kann das Volumen von Prismen mit viereckiger Grundfläche berechnen.

M4.10.02

Ich kann den Oberflächeninhalt von Prismen mit viereckiger Grundfläche berechnen.

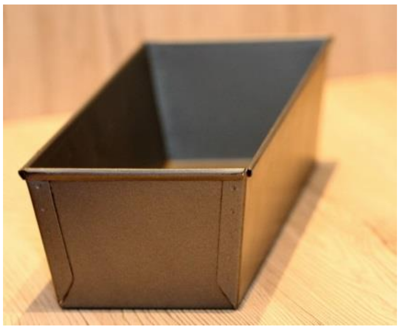
M5.12.05

Ich kann Streckenlängen wie Höhe oder Seitenhöhen in Körpern mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen.

M4.10.11

Ich kann das Volumen von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.

Aufgabe 1



In den Teig für einen Marmorkuchen gibt man Backpulver, in dem Natron enthalten ist. Dieses bildet aufgrund der Flüssigkeit im Teig und der Hitze im Backofen beim Backen Kohlendioxid. Aufsteigende Gasbläschen sorgen dafür, dass der Teig locker wird und das Volumen zunimmt.

a) Um wie viel Prozent darf das Volumen eines Teiges von 1,7 Litern maximal zunehmen, damit der Kuchen noch in eine solche Kastenform passt? Die Backform ist näherungsweise prismenförmig. Sie ist 8 cm hoch und 29 cm lang, oben 11 cm und unten 9 cm breit.

☞ Berechne das Volumen der Backform.

☞ Ermittle, um wie viel Prozent das Volumen der Kuchenform größer ist als 1,7 Liter.

b) Der Kuchenteig geht beim Backen so weit auf, dass der Kuchen am Ende genau die Form ausfüllt. Der Kuchen soll nun mit einer Schokoladenglasur überzogen werden. Wie groß ist die Fläche, die glasiert werden soll?

☞ Überlege: Welche Teile der Oberfläche müssen glasiert werden?

☞ Bestimme die Größe der Teilflächen, die glasiert werden sollen.

Aufgabe 2

Eine Rohrboden-Backform hat vereinfacht die Form eines zylinderförmigen Rings mit einer Höhe von 9 cm, einem Außendurchmesser von 24 cm und einem Innendurchmesser von 6 cm. Wie groß ist das Füllvolumen der Backform?

☞ Fertige eine vereinfachte Skizze der Backform an (zylinderförmig!) und trage die Maße ein.

☞ Zerlege die Form in zwei Zylinder.

☞ Berechne ihr Volumen.

☞ Berechne das Füllvolumen der Backform, indem du zwei Zylindervolumen voneinander abziehst.

Abb.: Backform mit Rohrboden

© Gmhofmann, 2012 (Wikimedia, CC BY SA)

Tipp:
Du kannst dir die ringförmige Form so vorstellen: Aus einem Zylinder mit größerem Durchmesser wird ein Zylinder mit kleinerem Durchmesser aber gleicher Höhe „herausgeschnitten“!

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 30.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Backen (GM / E)**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**		

Mathematik
M4.10

Lösung

Aufgabe 1

a) Volumen der Backform:

$V = G \cdot h = (11\text{ cm} + 9\text{ cm}) : 2 \cdot 8\text{ cm} \cdot 29\text{ cm} = 2320\text{ cm}^3 = \mathbf{2{,}32\,l}$

Maximal mögliche prozentuale Volumenzunahme:

$2{,}32\text{ l} : 1{,}7\text{ l} \approx 1{,}3647 \approx 136\,\%$

Das Volumen darf beim Backen um **maximal 36 %** zunehmen.

Volumen von Prismen: M4.10.04

b) Oberfläche:

Seitenhöhe der Kastenform:

$s = \sqrt{(8\text{ cm})^2 + ((11\text{ cm} - 9\text{ cm}) : 2)^2} \approx 8{,}1\text{ cm}$

Oberfläche des Kuchens (ohne Boden):

$O = 11\text{ cm} \cdot 29\text{ cm} + 2 \cdot (11\text{ cm} + 9\text{ cm}) : 2 \cdot 8\text{ cm} + 2 \cdot 29\text{ cm} \cdot 8{,}1\text{ cm}$

$= 948{,}8\text{ cm}^2 \approx \mathbf{950\text{ cm}^2}$

Oberfläche von Prismen: M4.10.02

Aufgabe 2

Man „zerlegt“ die Form gedanklich in einen großen Zylinder, aus dem ein kleiner Zylinder „herausgeschnitten“ ist:

$V = \pi \cdot (24\text{ cm} : 2)^2 \cdot 9\text{ cm} - \pi \cdot (6\text{ cm} : 2)^2 \cdot 9\text{ cm}$

$= \pi \cdot (12^2\text{ cm}^2 - 3^2\text{ cm}^2) \cdot 9\text{ cm}$

$= 135\text{ cm}^2 \cdot 9\text{ cm} \cdot \pi \approx \mathbf{3817{,}04\text{ cm}^3} \approx \mathbf{3{,}8\text{ l}}$

Volumen von Zylindern: M4.10.11

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 30.11.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 11**	**Kerzen gießen**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden (Prismen und Zylindern) berechnen.**

Mathematik
M4.11

Lernthema

Kerzen gießen

Abb.: Kerzengießform Pyramide (Exagon Kerzenwerk, Zürich)

Bezug zu Teilkompetenzen

M4.11.05
Ich kann das Volumen einer quadratischen Pyramide berechnen.

M4.10.11
Ich kann das Volumen von Zylindern berechnen.

M4.10.05
Ich kann das Volumen eines Prismas bestimmen.

M4.11.04 / M5.12.05
Ich kann die Seitenhöhe einer quadratischen Pyramide berechnen.

M4.10.06/13 / M4.11.06
Ich kann Volumenformeln nutzen, um fehlende Größen zu berechnen (bei Prisma, Zylinder und Pyramide)

M4.10.07/14
Ich kann Volumen und Oberflächeninhalt von prismen- und zylinderförmigen Gegenständen aus meiner Umwelt durch Ausmessen und Berechnen ermitteln.

M4.10.03/09 / M4.11.02
Ich kann den Oberflächeninhalt von Prismen bestimmen und von Zylindern und Pyramiden berechnen.

Kerzen gießen für den Schulbazar

Für den Weihnachtsbazar haben die Schülerinnen und Schüler einer neunten Klasse geplant, Kerzen zu gießen. Damit der Kerzenverkauf gut läuft, wollen sie vor allem Kerzenformen anbieten, die typisch für Weihnachtsmärkte sind.

Als erstes machen sie sich im Internet kundig. Sie suchen nach Gießformen und dem benötigten Material. Außer den üblichen zylinder- und quaderförmigen Kerzen gibt es Gießformen für Pyramidenkerzen und für kegelförmige Kerzen.

Folgende Formen sind über einen Onlineshop erhältlich:

Kerzenform	Maße (in mm)	Preis
Hoher Zylinder	60 x 220	15,95 €
Schlanker Zylinder	45 x 220	13,95 €
Pyramidenkerze groß	75 x 75 x 300	24,95 €
Pyramidenkerze hoch	60 x 60 x 228	13,95 €
Pyramidenkerze klein	48 x 48 x 80	4,95 €
Kegelförmige Kerze groß	80 x 180	12,95 €
Kegelförmige Kerze klein	55 x 80	4,95 €

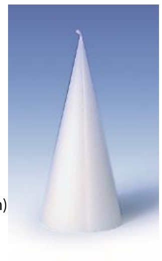


Abb.: Kerzengießformen (Exagon Kerzenwerk, Zürich)

Die pyramidenförmigen Kerzen haben eine quadratische Grundfläche. Als Maße sind hier die Grundkantenlängen und die Höhe angegeben; bei den zylinder- und kegelförmigen Kerzen der Durchmesser und die Höhe.

Zur Berechnung von Volumen und Oberflächeninhalt von **Kegeln** siehe LFS M4.13

Aufgabe 1

Bestimme, wieviel Wachs für die verschiedenen Formen benötigt wird. Berücksichtige dabei, dass 100 ml Wachs etwa 110 g wiegen.

☞ Berechne den Wachsbedarf in Gramm.

Verwende zum Berechnen den Taschenrechner.

Volumenberechnung
Zylinder: M4.10.13
Pyramide: M4.11.05

Aufgabe 2

Die Klasse entscheidet sich gegen den hohen Zylinder. Für alle anderen Kerzenformen müssen nun die Preise kalkuliert werden.

a) Bei der Kalkulation sind auch die Kosten für den Docht (dieser muss immer 2 cm länger als die Kerzenhöhe sein) und die Farbe zu berücksichtigen.

☞ Berechne zunächst die Materialkosten für jede Form.

5 m Flachdocht kosten 1,70 €.
1000 g Wachsmischung (aus 80 % Paraffin und 20 % Stearin) kosten 6,20 €.
Wachsfarbe (ausreichend für 1,5 kg Wachs) kosten 1,50 €.

b) Zusätzlich sollen die Kosten für die Gießformen anteilig auf jeweils 15 Kerzen umgelegt werden. Auch wenn nicht alle Kerzen verkauft werden oder wenn Ausschuss produziert wird, soll kein Verlust entstehen.

☞ Berechne, wie teuer eine Kerze jeweils verkauft werden sollte, damit die Kosten gedeckt sind, und errechne sinnvolle Vorschläge für Verkaufspreise der jeweiligen Formen.

Aufgabe 3

a) Jakob findet eine prismenförmige Gießform mit sechseckiger Grundfläche. Jede Kante ist 35 mm lang. Die Form hat eine Höhe von 17 cm.

☞ Berechne das Volumen der Form und ermittle einen passenden Verkaufspreis.

b) Wie hoch müsste eine pyramidenförmige Kerze mit einer quadratischen Grundfläche mit Kantenlänge 70 mm sein, damit sie dasselbe Volumen hätte?

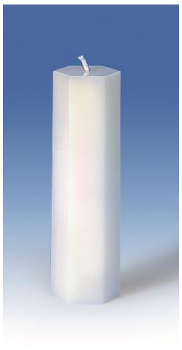


Abb.: Kerzengießform Pyramide (Exagon Kerzenwerk, Zürich)

Wie hoch müsste eine entsprechende zylinderförmige bzw. kegelförmige Kerze mit Durchmesser 70 mm sein?

☞ Berechne die gesuchten Höhen.

c) Wie hoch müsste dagegen die sechseckige, prismenförmige Kerze sein, damit sie dasselbe Volumen wie die große kegelförmige Kerze hätte?

☞ Berechne auch hier die gesuchte Höhe.

Tipp: Zeichne zunächst die Grundfläche und teile sie geschickt ein, sodass du ihren Flächeninhalt berechnen kannst.

Volumenberechnung Prisma: M4.10.05

Aufgabe 4

Die Kerzen können mit einem Schutzlack überzogen werden, der etwa 5 Cent pro 100 cm^2 kostet. Tina meint: „Das sieht zwar gut aus, ist aber viel zu teuer." Was meinst du dazu?

☞ Berechne die Oberfläche der verschiedenen Formen und entscheide.

Oberflächeninhalt
Zylinder: M4.10.11
Prisma: M4.10.03
Pyramide: M4.11.02

Zusatzaufgabe 1

Kauft man das Stearin und das Paraffin getrennt und mischt es selbst im Verhältnis 1 zu 7 beim Kerzengießen, so kann man noch etwas sparen. 1 kg Stearin kosten 6,07 €, 1 kg Paraffin 5,59 €.

☞ Berechne an einem Beispiel, wie viel Prozent der Materialkosten sich bei einer Kerze etwa einsparen lassen würde, wenn man das Wachs selbst mischt.

LernPROJEKT: Ihr könnt aus diesem Lernthema ein Projekt machen und selbst Kerzen für einen Bazar herstellen.

Zusatzaufgabe 2

Suche selbst nach Kerzen in verschiedenen Formen.

☞ Miss deren Maße und ermittle das Volumen.

☞ Fertige jeweils ein Schildchen mit den Maßen an und bringe sie in den Mathematikunterricht mit.

Autoren:
Christine Fürch
Andreas von Scholz
Datum:
28.09.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 11**	**Kerzen gießen**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden (Prismen und Zylindern) berechnen.**		

Mathematik M4.11

Lösung

Aufgabe 1

Volumen:

Hoher Zylinder:	$\pi \cdot (3\text{ cm})^2 \cdot 22\text{ cm} \approx \mathbf{622\ cm^3}$
Schlanker Zylinder:	$\pi \cdot (22{,}5\text{ mm})^2 \cdot 220\text{ mm} \approx 349895\text{ mm}^3 \approx \mathbf{350\ cm^3}$
Pyramidenkerze groß:	$(7{,}5\text{ cm})^2 \cdot 30\text{ cm} : 3 = \mathbf{562{,}5\ cm^3}$
Pyramidenkerze hoch:	$(6\text{ cm})^2 \cdot 22{,}8\text{ cm} : 3 = \mathbf{273{,}6\ cm^3}$
Pyramidenkerze klein:	$(4{,}8\text{ cm})^2 \cdot 8\text{ cm} : 3 = \mathbf{61{,}44\ cm^3}$
Kegelförmige Kerze groß:	$\pi \cdot (4\text{ cm})^2 \cdot 18\text{ cm} : 3 \approx \mathbf{302\ cm^3}$
Kegelförmige Kerze klein:	$\pi \cdot (27{,}5\text{ mm})^2 \cdot 80\text{ mm} : 3 \approx 63355\text{ mm}^3 \approx \mathbf{63\ cm^3}$

Volumenberechnung
Zylinder: M4.10.11
Pyramide: M4.11.05

Zur Berechnung des **Kegelvolumens** siehe **M4.13**

Wachsbedarf in Gramm:

Hoher Zylinder:	$6{,}22 \cdot 110\text{ g} = 684{,}2\text{ g}$	$\approx \mathbf{685\ g}$
Schlanker Zylinder:	$3{,}5 \cdot 110\text{ g} =$	$\mathbf{385\ g}$
Pyramidenkerze groß:	$5{,}625 \cdot 110\text{ g} = 618{,}75\text{ g}$	$\approx \mathbf{620\ g}$
Pyramidenkerze hoch:	$2{,}736 \cdot 110\text{ g} = 300{,}96\text{ g}$	$\approx \mathbf{300\ g}$
Pyramidenkerze klein:	$0{,}6144 \cdot 110\text{ g} = 67{,}584\text{ g}$	$\approx \mathbf{70\ g}$
Kegelförmige Kerze groß:	$3{,}02 \cdot 110\text{ g} = 332{,}2\text{ g}$	$\approx \mathbf{330\ g}$
Kegelförmige Kerze klein:	$0{,}63 \cdot 110\text{ g} = 69{,}3\text{ g}$	$\approx \mathbf{70\ g}$

Die Ergebnisse sind hier auf 5 g genau gerundet.

Aufgabe 2

a) Die Wachsfarbe kostet 0,10 € pro 100 g Wachs. 100 g Wachs kosten 0,62 €, d. h. 0,72 € für je 100 g Wachs, die in eine Gießform passen. Dazu kommt der Docht mit 170 Cent : 500 = 0,34 Cent pro cm.

Schlanker Zylinder:	$3{,}85 \cdot 0{,}72\text{ €} + 24 \cdot 0{,}0034\text{ €} = 2{,}8536\text{ €}$	$\approx \mathbf{2{,}85\ €}$
Pyramidenkerze groß:	$6{,}2 \cdot 0{,}72\text{ €} + 32 \cdot 0{,}0034\text{ €} = 4{,}5728\text{ €}$	$\approx \mathbf{4{,}57\ €}$
Pyramidenkerze hoch:	$3 \cdot 0{,}72\text{ €} + 24{,}8 \cdot 0{,}0034\text{ €} = 2{,}24432\text{ €}$	$\approx \mathbf{2{,}24\ €}$
Pyramidenkerze klein:	$0{,}7 \cdot 0{,}72\text{ €} + 10 \cdot 0{,}0034\text{ €} = 0{,}538\text{ €}$	$\approx \mathbf{0{,}54\ €}$
Kegelförmige Kerze groß:	$3{,}3 \cdot 0{,}72\text{ €} + 20 \cdot 0{,}0034\text{ €} = 2{,}444\text{ €}$	$\approx \mathbf{2{,}44\ €}$
Kegelförmige Kerze klein:	$0{,}7 \cdot 0{,}72\text{ €} + 10 \cdot 0{,}0034\text{ €} = 0{,}538\text{ €}$	$\approx \mathbf{0{,}54\ €}$

b)

Schlanker Zylinder:	$2{,}85\text{ €} + 13{,}95\text{ €} : 15$	$= \mathbf{3{,}78\ €}$	$\rightarrow \mathbf{5{,}20\ €}$
Pyramidenkerze groß:	$4{,}57\text{ €} + 24{,}95\text{ €} : 15$	$\approx \mathbf{6{,}23\ €}$	$\rightarrow \mathbf{8{,}50\ €}$
Pyramidenkerze hoch:	$2{,}24\text{ €} + 13{,}95\text{ €} : 15$	$= \mathbf{3{,}17\ €}$	$\rightarrow \mathbf{4{,}30\ €}$
Pyramidenkerze klein:	$0{,}54\text{ €} + 4{,}95\text{ €} : 15$	$= \mathbf{0{,}87\ €}$	$\rightarrow \mathbf{1{,}20\ €}$
Kegelförmige Kerze groß:	$2{,}44\text{ €} + 12{,}95\text{ €} : 15$	$\approx \mathbf{3{,}30\ €}$	$\rightarrow \mathbf{4{,}50\ €}$
Kegelförmige Kerze klein:	$0{,}54\text{ €} + 4{,}95\text{ €} : 15$	$= \mathbf{0{,}87\ €}$	$\rightarrow \mathbf{1{,}20\ €}$

Für die Preisvorschläge wurden immer 35 % auf den Preis geschlagen und das Ergebnis auf die nächsten vollen 10 Cent aufgerundet.

Aufgabe 3

a) Unterteilt man das Sechseck in gleiche Dreiecke, so erhält man sechs gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge 35 mm.
Volumen: $6 \cdot 5{,}30\ \text{cm}^2 \cdot 17\ \text{cm} \approx \mathbf{540{,}6\ cm^3}$
$(5{,}41 \cdot 0{,}72\ € + 19 \cdot 0{,}0034\ €) \cdot 1{,}35 \approx \mathbf{5{,}35\ €}$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks (ca. 5,30 cm²) kann mit der Formel für gleichseitige Dreiecke berechnet werden oder mithilfe der aus einer Zeichnung ermittelten Höhe.

b) Pyramidenförmige Kerze mit demselben Volumen:
Grundfläche: $(7\ \text{cm})^2 = 49\ \text{cm}^2$
→ Erforderliche Höhe: $540{,}6\ \text{cm}^3 \cdot 3 : 49\ \text{cm}^2 \approx \mathbf{33{,}1\ cm}$
Zylinderförmige Kerze mit demselben Volumen:
Grundfläche: $\pi \cdot (3{,}5\ \text{cm})^2 \approx 38{,}48\ \text{cm}^2$
→ Erforderliche Höhe: $540{,}6\ \text{cm}^3 : 38{,}48\ \text{cm}^2 \approx \mathbf{14{,}05\ cm}$
Kegelförmige Kerze mit demselben Volumen:
→ Erforderliche Höhe: $14{,}05\ \text{cm} \cdot 3 = \mathbf{42{,}15\ cm}$

c) Grundfläche der sechseckigen Kerze: $6 \cdot 5{,}3\ \text{cm}^2 \approx 31{,}8\ \text{cm}^2$
→ Erforderliche Höhe: $302\ \text{cm}^3 : 31{,}8\ \text{cm}^2 \approx \mathbf{9{,}5\ cm}$

Aufgabe 4

Hoher Zylinder: $O = 2 \cdot \pi \cdot 3\ \text{cm} \cdot (3\ \text{cm} + 22\ \text{cm}) \approx \mathbf{471\ cm^2}$
Schlanker Zylinder: $O = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}25\ \text{cm} \cdot (2{,}25\ \text{cm} + 22\ \text{cm}) \approx \mathbf{343\ cm^2}$
Pyramidenkerze groß:
Seitenhöhe s: $s = \sqrt{(30\ \text{cm})^2 + (3{,}75\ \text{cm})^2} \approx 30{,}23\ \text{cm}$
Oberfläche: $O = (7{,}5\ \text{cm})^2 + 4 \cdot (7{,}5\ \text{cm} \cdot 30{,}23\ \text{cm}) : 2 = \mathbf{510\ cm^2}$
Pyramidenkerze hoch:
Seitenhöhe s: $s = \sqrt{(22{,}8\ \text{cm})^2 + (3\ \text{cm})^2} \approx 23{,}00\ \text{cm}$
Oberfläche: $O = (6\ \text{cm})^2 + 4 \cdot (6\ \text{cm} \cdot 23\ \text{cm}) : 2 = \mathbf{312\ cm^2}$
Pyramidenkerze klein:
Seitenhöhe s: $s = \sqrt{(8\ \text{cm})^2 + (2{,}4\ \text{cm})^2} \approx 8{,}35\ \text{cm}$
Oberfläche: $O = (4{,}8\ \text{cm})^2 + 4 \cdot (4{,}8\ \text{cm} \cdot 8{,}35\ \text{cm}) : 2 \approx \mathbf{103\ cm^2}$

Berechnung der Seitenhöhe mithilfe des Satzes des Pythagoras

$s^2 = h^2 + (a{:}2)^2$

Kegelförmige Kerze groß:
Mantellinie s: $s = \sqrt{(18\ \text{cm})^2 + (4\ \text{cm})^2} \approx 18{,}44\ \text{cm}$
Oberfläche: $O = \pi \cdot (4\ \text{cm})^2 + \pi \cdot 4\ \text{cm} \cdot 18{,}44\ \text{cm} \approx \mathbf{282\ cm^2}$
Kegelförmige Kerze klein:
Mantellinie s: $s = \sqrt{(8\ \text{cm})^2 + (2{,}75\ \text{cm})^2} \approx 8{,}46\ \text{cm}$
Oberfläche: $O = \pi \cdot (2{,}75\ \text{cm})^2 + \pi \cdot 2{,}75\ \text{cm} \cdot 8{,}46\ \text{cm} \approx \mathbf{97\ cm^2}$
Prisma (aus Aufgabe 3):
$O = 2 \cdot G + 6 \cdot 3{,}5\ \text{cm} \cdot 17\ \text{cm} \approx 10{,}6\ \text{cm}^2 + 357\ \text{cm}^2 = \mathbf{367{,}6\ cm^2}$

Zur Berechnung des **Oberflächeninhalts eines Kegels** siehe **M4.13**

$s^2 = h^2 + r^2$

→ zusätzliche Kosten: zwischen ca. 0,05 € bei kleiner kegelförmiger Kerze und kleiner Pyramidenkerze und ca. 0,26 € bei der großen Pyramidenkerze.

Zusatzaufgabe 1

8 kg Kerzenwachs kosten $6{,}07\ € + 7 \cdot 5{,}59\ € = 45{,}20\ €$, pro 100 g also g 0,565 €.
Pyramidenkerze hoch: $3 \cdot 0{,}565\ € + 24{,}8 \cdot 0{,}0034\ € = 1{,}77932\ € \approx \mathbf{1{,}78\ €}$

Anteil am Preis mit der fertigen Wachsmischung: $1{,}78 : 2{,}24 \approx \mathbf{0{,}79}$.
Man könnte damit die Materialkosten auf 79 % senken, also **21 % einsparen**.

Autoren:
Christine Fürch
Andreas von Scholz
Datum:
28.09.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Schokolade**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**

Mathematik
M4.10

Lernthema

Schokolade

Bezug zu Teilkompetenzen

M4.10.04

Ich kann das Volumen von Prismen berechnen.

M4.10.03

Ich kann den Oberflächeninhalt von Prismen bestimmen.

M4.11.06

Ich kann die Formel für das Volumen einer quadratischen Pyramide nutzen, um fehlende Größen zu berechnen.

M4.11.02

Ich kann anhand von Grundkantenlänge und Seitenhöhe den Oberflächeninhalt einer quadratischen Pyramide berechnen.

M5.08.04

Ich kann anhand von Längenangaben Netze zu Prismen und Pyramiden zeichnen.

M5.08.05

Ich kann verschiedene alternative Körpernetze zu ein und denselben Prismen und Pyramiden zeichnen.

M5.08.01/02

Ich kann Körpernetze und daraus Körpermodelle erstellen.

M5.08.15

Ich kann Schrägbilder von Prismen und Pyramiden zeichnen.

Schokoladenherstellung

Die Marketingabteilung eines Schokoladenherstellers plant für eine Jubiläums-Werbeaktion eine Schokolade in einer besonderen Form.

Aufgabe 1

a) Der Vorschlag sieht eine dreieckige prismenförmige Schokolade vor, die 9 cm lang ist und deren Grundfläche aus einem gleichseitigen Dreieck mit 30 mm Seitenlänge besteht.

☞ Skizziere das Schrägbild einer solchen Schokolade.

b) 10 cm^3 der Schokoladenrezeptur wiegen 13 g.

☞ Berechne das Gewicht der Schokolade.

☞ Berechne, welche Länge die Schokolade haben müsste, wenn sie 100 g wiegen sollte.

Volumenberechnung Prisma: M4.10.04

Aufgabe 2

a) Für die Planung der Verpackung soll die Größe der Alufolie und der Umverpackung aus Karton bestimmt werden.

☞ Berechne hierzu den Oberflächeninhalt des Prismas.

Oberflächeninhalt Prisma: M4.10.02

b) Als Alternative wird eine Schokolade als quadratische Pyramide mit einer Grundkantenlänge von 30 mm diskutiert. Es soll möglichst wenig Verpackungsmüll produziert werden.

☞ Berechne, wie hoch die Pyramide sein muss, damit sie dasselbe Volumen hat.

☞ Berechne auch die Größe der Oberfläche einer solchen pyramidenförmigen Schokolade mit 11,7 cm Höhe.

Pyramide:
Volumen: M4.11.05
Oberfläche: M4.11.02

c) Zur Herstellung der Umverpackung sollen jeweils zusammenhängende Netze aus Karton ausgestanzt werden, wobei möglichst wenig Abfall entstehen soll.

☞ Zeichne sowohl für das Prisma, als auch für die Pyramide jeweils zwei verschiedene Netze.

Zur Bestimmung der Oberfläche muss man zunächst die Seitenhöhe der Dreiecke berechnen.

d) Überlege: - Wie sollte der Karton ausgestanzt werden?
- Was spricht für die Pyramidenform, was für das Prisma?

Aufgabe 3

Für die Vorstellung in einer Produktpräsentation sollen für die beiden Alternativen Modelle und Zeichnungen erstellt werden.

☞ Übertrage jeweils eines der Netze auf dünnen Karton und baue daraus ein Modell. Ergänze vor dem Ausschneiden Klebelaschen!

☞ Fertige je ein Schrägbild des Prismas und der Pyramide an.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 07.10.2015

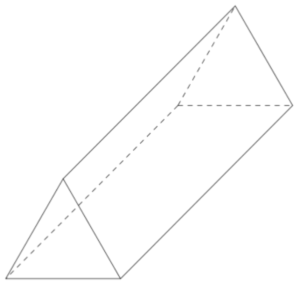
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	
4 Messen	**LFS 10**	**Schokolade**	**Mathematik M4.10**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**			**Lösung**

Der Inhalt der Grundfläche kann mit der Formel für gleichseitige Dreiecke oder mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnet werden.
Alternative: Man zeichnet das Dreieck, misst die Höhe und berechnet damit den Flächeninhalt.

Die erforderliche Länge bei 100 g kann man auch mit dem Dreisatz ermitteln oder mithilfe der Volumenformel für Prismen mit unbekannter Höhe h.

Aufgabe 1

a)



b) Volumen: $V = G \cdot h = \sqrt{3} \cdot \frac{3^2}{4} \cdot 9\ \text{cm}^3 \approx \mathbf{35{,}07\ cm^3}$

Gewicht: $35{,}07 \cdot 1{,}3\ \text{g} \approx \mathbf{45{,}6\ g}$

Länge bei 100g: $9\ \text{cm} \cdot \frac{100}{45{,}6} \approx \mathbf{19{,}7\ cm}$

Aufgabe 2

a) Prismenoberfläche: $O = 2 \cdot G + 3 \cdot S = 2 \cdot (\sqrt{3} \cdot \frac{3^2}{4}\ \text{cm}^2) + 3 \cdot (9\ \text{cm} \cdot 3\ \text{cm})$

$\approx \mathbf{88{,}79\ cm^2}$

b) **Pyramidenhöhe:** Wegen $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ und $G = 3\ \text{cm} \cdot 3\ \text{cm} = 9\ \text{cm}^2$ ist

$h = 3 \cdot V : G \approx 105{,}22\ \text{cm}^3 : 9\ \text{cm}^2 \approx \mathbf{11{,}7\ cm}$

Pyramidenoberfläche:

$O = G + 4 \cdot S = 9\ \text{cm}^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\ \text{cm} \cdot s$

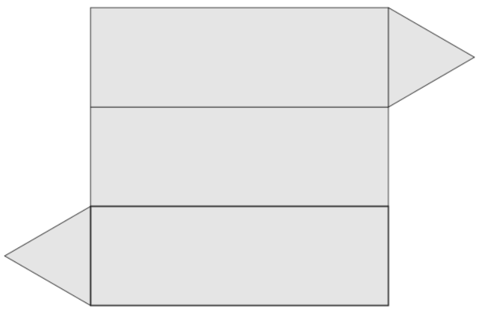
mit der Seitenhöhe $s = \sqrt{(11{,}7\ \text{cm})^2 + (1{,}5\ \text{cm})^2} \approx 11{,}8\ \text{cm}$

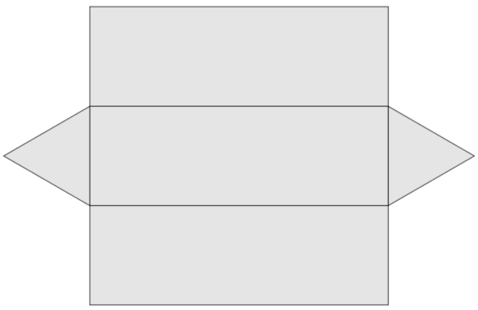
$O \approx 9\ \text{cm}^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\ \text{cm} \cdot 11{,}8\ \text{cm} = \mathbf{79{,}8\ cm^2}$

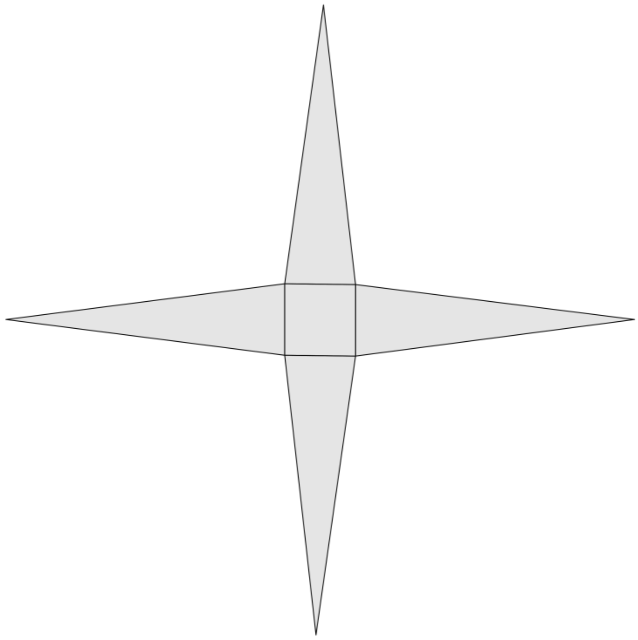
Volumenberechnung Pyramide: M4.11.05

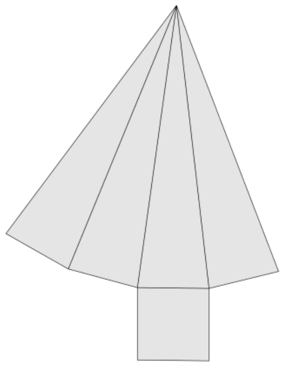
Pythagoras:
$h^2 + (3\ \text{cm} : 2)^2 = s^2$

c) Mögliche Formen für die Netze sind beispielsweise





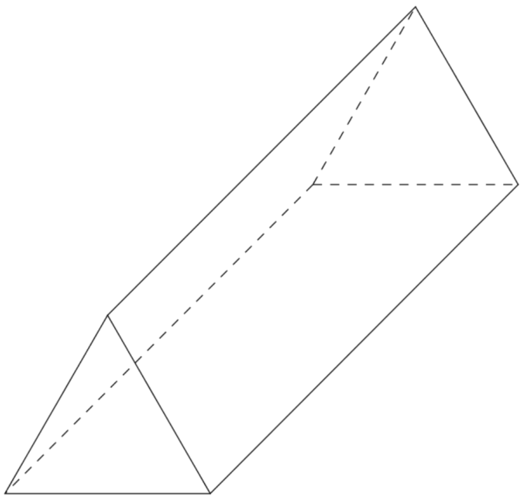


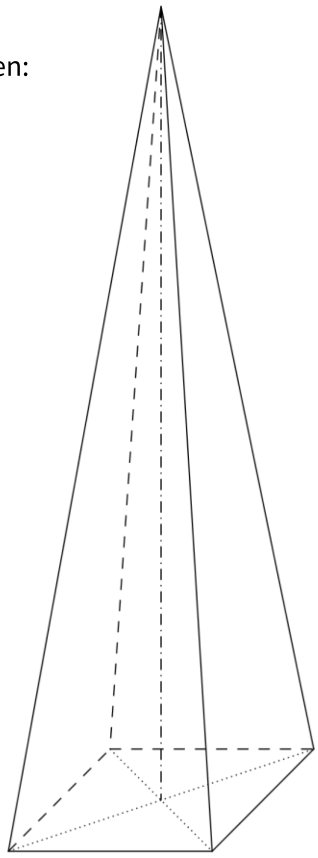


d) Beim Prisma ist es sinnvoll, das linke Netz zu verwenden und „zeilenweise" hintereinander und untereinander aus dem Karton auszustanzen. Bei der Pyramide entsteht wohl beim rechten Netz weniger Abfall, wenn man einzelne Netze gedreht nebeneinander ausstanzt.
Die Pyramide hat zwar die geringere Oberfläche und ist origineller, allerdings wiegt der zu erwartende höhere Abfall bei der Verpackungsproduktion die geringere Oberfläche auf. Außerdem scheint die lange und dünne Pyramidenspitze sehr gefährdet zu sein abzubrechen.

Aufgabe 3

Die Schrägbilder könnten wie folgt aussehen:





Autor: Andreas von Scholz
Datum: 07.10.2015

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 10**	**Außenbecken einer Therme**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**

Mathematik
M4.10

Lernthema

Erweiterung des Außenbereichs einer Therme

Abb.: Das Thermalbad Vita Classica in Bad Krozingen

Bezug zu Teilkompetenzen

M5.08.12

Ich kann Grund- und Aufriss von Prismen, Pyramiden und Zylinder zeichnen.

M4.10.05

Ich kann das Volumen eines Prismas bestimmen.

M4.10.11

Ich kann das Volumen von Zylindern mithilfe der Formel berechnen.

Erweiterung des Außenbereichs eines Thermalbades

Der Betreiber möchte den Außenbereich seines Thermalbades um ein Becken erweitern. Das Becken soll sich aus verschiedenen Bereichen zusammensetzen. In der Ausschreibung wünscht er sich mindestens folgende Angebote:

- eine 25 m-Bahn (Schwimmbereich),
- einen Whirlpool,
- einen Strömungskanal und
- eine Anbindung an das Haupthaus.

Die verschiedenen Bereiche sollen verschiedene Wassertiefen haben.

Aufgabe 1

a) Entwickle eine Idee zu diesen Vorgaben. Du kannst auch noch weitere Bereiche einbauen. Fertige zunächst eine Skizze an. Hier brauchst du noch nicht auf die richtigen Dimensionen zu achten.

☞ Erstelle einen Grundriss deiner Idee.

b) Nun soll ein Bauplan erstellt werden. Übertrage deine Skizze. Zeichne exakt auf Millimeterpapier und nutze einen sinnvollen Maßstab. Arbeite mit Lineal (Geodreieck), angespitztem Bleistift und Zirkel.

☞ Zeichne einen maßstabsgetreuen Plan auf Millimeterpapier.

☞ Bemaße deine Zeichnung vollständig.

☞ Beschrifte die verschiedenen Bereiche deines Außenbeckens.

c) Lege jeweils eine Wassertiefe für die verschiedenen Beckenbereiche fest. Im Internet kannst du recherchieren, welche Wassertiefen üblich oder geeignet sind.

☞ Notiere in deinem Plan die verschiedenen Wassertiefen.

d) Es handelt sich um sogenannte „Überlaufbecken“, die bis zum Rand mit Wasser gefüllt sind. Bestimme den Wasserbedarf zur Befüllung des gesamten Außenbeckens.

☞ Berechne das Volumen der einzelnen Beckenbereiche.

☞ Ermittle das Gesamtvolumen in Litern.

Tipp:
Die Grundfläche des Whirlpools könnte der Einfachheit halber ein Quadrat sein, somit ist der Körper ein Quader oder Würfel, (je nach Wassertiefe).
Der Strömungskanal könnte ein halber Hohlzylinder sein.
Der Schwimmbereich könnte wieder ein Quader sein.
Die Anbindung an das Haupthaus könnte ein Prisma mit einer Trapezgrundfläche sein.

Aufgabe 2

Vergleiche deine Lösung mit der von Mitschülerinnen und Mitschülern.

☞ Diskutiert Sinn und Durchführbarkeit der einzelnen Entwürfe.

Zusatzaufgabe

Fertige ein Modell zu deinem Entwurf an. Trage verschiedene Materialien (z. B. Verpackungen) zusammen, die annähernd den Dimensionen aus Aufgabe 1 b) und c) entsprechen. Vielleicht kannst du daran auch im Technikunterricht arbeiten.

☞ Erstelle ein Modell.

Autorin: Alexandra Hoffmann
Datum: 10.01.2016

Kompetenzbereich **4 Messen**	Lernfortschritt **LFS 10**	Materialien/Titel **Außenbecken einer Therme**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.**		

Mathematik
M4.10

Lösung

Aufgabe 1

Es wird beispielhaft die Lösung von Aufgabe 1 an einem Entwurf vorgeführt.

a) Individuelle Lösungen

b) und c) siehe Zeichnung auf der Rückseite

d) Volumenberechnung des Schwimmbeckens:

$V_{Quader\text{-}Schwimmbecken} = a \cdot b \cdot c$ mit a = 12 m; b = 25 m; c = 2 m

$V_{Quader\text{-}Schwimmbecken} = 12\text{ m} \cdot 25\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 600\text{ m}^3$

Volumenberechnung des Strömungskanals:

$V_{Hohlzylinder} = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot h$ mit R = 6 m; r = 4 m; h = 1,5 m

$V_{Hohlzylinder} = \pi \cdot (36\text{ m}^2 - 16\text{ m}^2) \cdot 1{,}5\text{ m} = 94{,}25\text{ m}^3$

$V_{Kanal} = V_{Hohlzylinder} : 2 = 47{,}125\text{ m}^3$

Volumenberechnung des Whirlpools:

Oberer Quader (von Wasseroberfläche bis zur Sitzfläche):

$V_{Quader\text{-}O} = a \cdot a \cdot h$ mit a = 6 m; h = 0,4 m

$V_{Quader\text{-}O} = 6\text{ m} \cdot 6\text{ m} \cdot 0{,}4\text{ m} = 14{,}4\text{ m}^3$

Unterer Quader (vom Boden bis zur Sitzfläche):

$V_{Quader\text{-}U} = a \cdot b \cdot h$ mit a = 5,4 m; b = 4,8 m, h = 0,8 m

$V_{Quader\text{-}U} = 5{,}4\text{ m} \cdot 4{,}8\text{ m} \cdot 0{,}8\text{ m} = 20{,}74\text{ m}^3$

Gesamtvolumen Whirlpool:

$V_{Whirlpool} = V_{Quader\text{-}O} + V_{Quader\text{-}U}$

$V_{Whirlpool} = 14{,}4\text{ m}^3 + 20{,}74\text{ m}^3 = 35{,}14\text{ m}^3$

Volumenberechnung der Anbindung an das Haupthaus:

$V_{Trapezprisma} = ((a+c):2 \cdot h_{Trapez}) \cdot h$

Stufe 1 mit a = 4 m; c = 5 m; h_{Trapez} = 2 m ; h = 1,6 m

$V_{Stufe1} = ((4\text{ m} + 5\text{ m}) : 2 \cdot 2\text{ m}) \cdot 1{,}6\text{ m} = 14{,}4\text{ m}^3$

Stufe 2 mit a = 5 m; c = 6 m; h_{Trapez} = 2 m ; h = 1,8 m

$V_{Stufe2} = ((5\text{ m} + 6\text{ m}) : 2 \cdot 2\text{ m}) \cdot 1{,}8\text{ m} = 19{,}8\text{ m}^3$

Gesamtvolumen der Anbindung an das Haupthaus

$V_{Anbindung} = V_{Stufe1} + V_{Stufe2}$

$V_{Anbindung} = 14{,}4\text{ m}^3 + 19{,}8\text{ m}^3 = 34{,}2\text{ m}^3$

Gesamtvolumen:

$V_{Gesamt} = V_{Quader\text{-}Schwimmbecken} + V_{Kanal} + V_{Whirlpool} + V_{Anbindung}$

$V_{Gesamt} = 600\text{ m}^3 + 47{,}125\text{ m}^3 + 35{,}14\text{ m}^3 + 34{,}2\text{ m}^3 = 716{,}465\text{ m}^3$

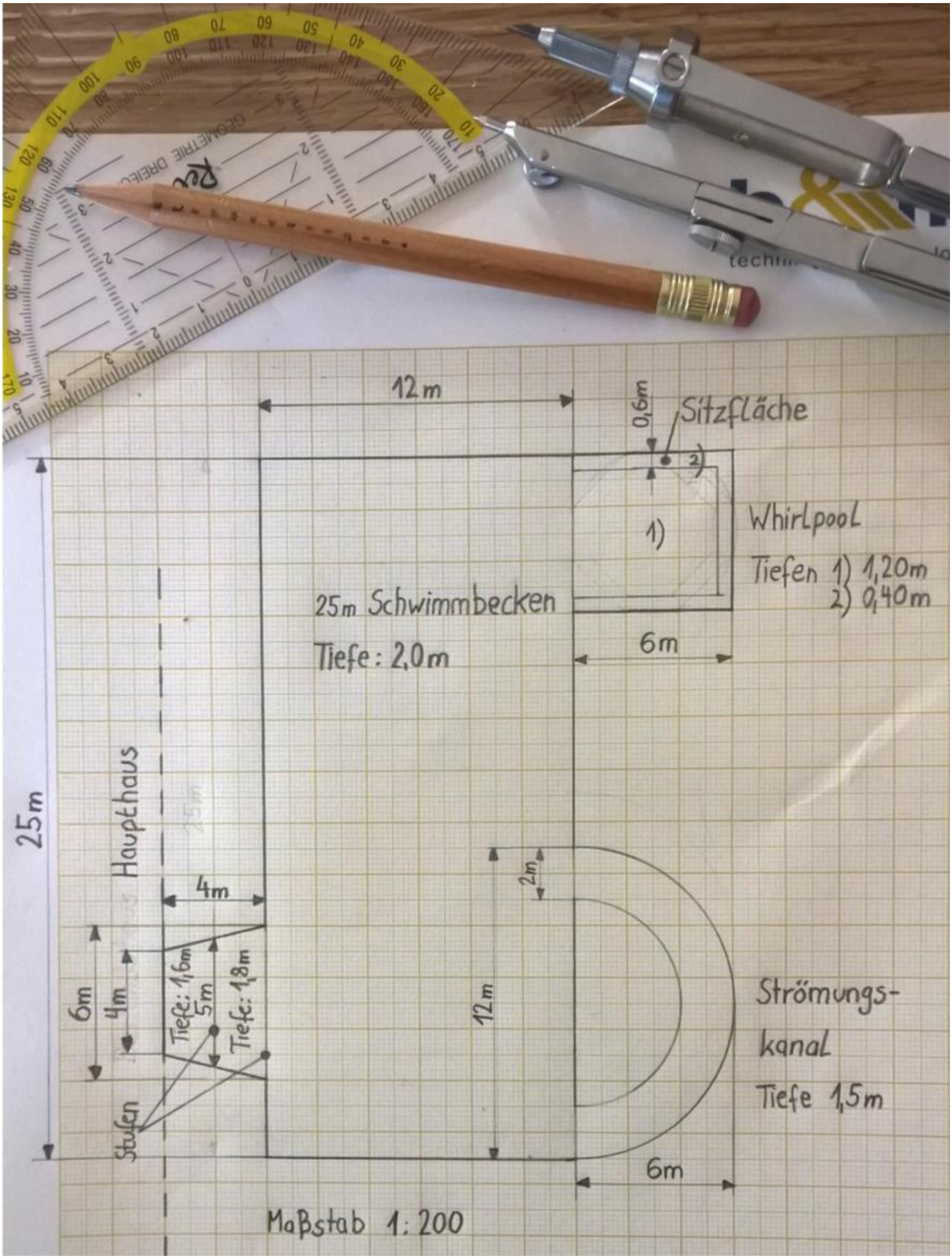
Wegen 1 m^3 = 1000 l beträgt der Wasserbedarf für das gesamte Becken ca. **720000 l**.

Aufgabe 2

Individuelle Lösungen

Zusatzaufgabe

Individuelle Lösungen



Bauplan für das Außenbecken einer Therme mit Bemaßung und Wassertiefen

Autorin: Alexandra Hoffmann
Datum: 10.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 12**	**Wunderschöne Bauwerke**

Mathematik
M4.12

Kompetenz

- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen, Pyramiden und Zylindern und daraus zusammengesetzten Körpern bestimmen.**

Lernthema

Wunderschöne Bauwerke

Abb.: Schloss Neuschwanstein (pixabay, CCO)

Bezug zu Teilkompetenzen

M4.12.04

Ich kann den Oberflächeninhalt von aus Prismen, Zylindern und Pyramiden zusammengesetzten Körpern bestimmen.

M4.12.06

Ich kann anwendungsbezogene Aufgaben zum Oberflächeninhalt eines Körpers lösen, wenn der Körper aus Prismen, Zylindern und Pyramiden zusammengesetzt ist.

Schlösser und andere schöne Bauwerke

Abbildung: Schloss Neuschwanstein (pixabay, CCO)

Aufgabe 1

a) Das abgebildete Schloss Neuschwanstein setzt sich aus den unterschiedlichsten geometrischen Körpern zusammen.

☞ Notiere, aus welchen Körpern das Schloss zusammengesetzt ist.

b) Suche selbst solche Bauwerke, die aus mehreren unterschiedlichen Körpern zusammengesetzt sind.

☞ Erstelle ein kleines Heft, in das du jeweils das Bild eines Bauwerks auf die Vorderseite einer Seite klebst und auf der Rückseite die Einzelkörper und ihre Position notierst.

Aufgabe 2

a) Überlege dir selbst ein Gebäude, das du gerne bauen würdest und das vereinfacht einen zusammengesetzten Körper darstellt – vielleicht dein Traumhaus, ein Schloss oder ein Fußballstadion mit besonderen Elementen.

☞ Fertige eine grobe Skizze des Gebäudes an.

b) Sammle unterschiedliche Körper (z. B. Klorollen als Zylinder).

☞ Baue den von dir entworfenen zusammengesetzten Körper nach.

c) Nun soll das Modell bemalt werden. Die Preise für die Acrylfarben liegen bei 0,15 € für 12 ml. Laut Angabe der Hersteller sollen sie für 0,25 m^2 reichen. Bedenke dabei, dass du vielleicht verschiedene Farben benötigst.

☞ Berechne die Größen der zu bemalenden Flächen und die entstehenden Kosten.

d) Wie hoch wären die Kosten, wenn das Modell in einem Maßstab von 1 : 25 gebaut würde? Du kannst für 10 l Farbe mit einem Preis von 159,90 € und einer Reichweite von 65 m^2 rechnen.

☞ Berechne die Farbkosten.

Autorin: Daniela Eberhard
Datum: 21.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 12**	**Wunderschöne Bauwerke**
Kompetenz:		
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen, Pyramiden und Zylindern und daraus zusammengesetzten Körpern bestimmen.**		

Mathematik
M4.12

Lösung

Aufgabe 1

a) Zylinder (Türme)
Kegel (Turmspitzen)
Quader (Türme)
Prismen (manche Dächer / manche Erker)
Kugeln (in den Spitzen)
Pyramiden mit quadratischer Grundfläche (Türme an den Ecken des großen Daches)

b) Lösungen individuell

Aufgabe 2

Lösungen individuell

Autorin: Daniela Eberhard
Datum: 21.01.2016

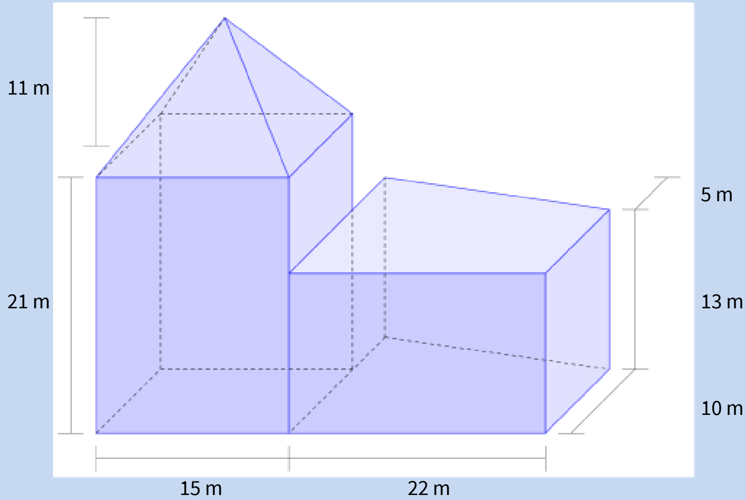
Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 12**	**Gebäudesanierungskosten**

Mathematik
M4.12

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen, Pyramiden und Zylindern und daraus zusammengesetzten Körpern bestimmen.**

Lernthema

Kalkulation von Gebäudesanierungskosten



Bezug zu Teilkompetenzen

M4.12.03

Ich kann das Volumen von aus Prismen, Zylindern und Pyramiden zusammengesetzten Körpern bestimmen.

M4.12.04

Ich kann den Oberflächeninhalt von aus Prismen, Zylindern und Pyramiden zusammengesetzten Körpern bestimmen.

M4.12.05

Ich kann anwendungsbezogene Aufgaben zum Volumen eines Körpers lösen, wenn der Körper aus Prismen, Zylindern und Pyramiden zusammengesetzt ist.

M4.12.06

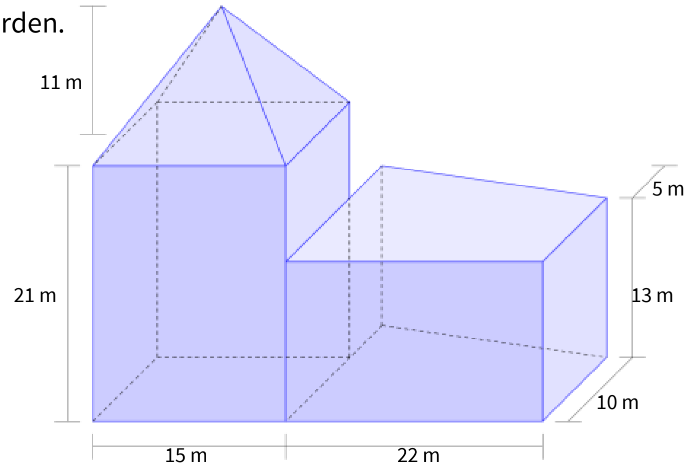
Ich kann anwendungsbezogene Aufgaben zum Oberflächeninhalt eines Körpers lösen, wenn der Körpers aus Prismen, Zylindern und Pyramiden zusammengesetzt ist.

Kostenkalkulation bei einer Gebäudesanierung

Aufgabe 1

a) Für die Kostenkalkulation bei der anstehenden Renovierung sollen zu dem abgebildeten Kirchengebäude der „umbaute Raum“, die Dachfläche des Turmdaches, die Flachdachfläche des Kirchenschiffes und die Fassadenfläche berechnet werden.

Unter dem sog. „**umbauten Raum**“ (oder „Brutto-Rauminhalt“ / BRI) versteht man das gesamte Volumen eines Gebäudes einschließlich der Außenmauern.



☞ Berechne das Volumen und die entsprechenden Flächeninhalte.

b) Für die Fassadensanierung (ohne Dämmung) werden incl. Gerüst 60 € pro m^2 angesetzt. Für das Flachdach und das Spitzdach werden Quadratmeterpreise von 100 € bzw. 80 € veranschlagt.

☞ Berechne die zu erwartenden Renovierungskosten.

Aufgabe 2

Der Wert eines Gebäudes ist bspw. für die Versicherung wichtig. Man kann ihn entweder anhand der erwartbaren aktuellen Gebäudeerstellungskosten berechnen (ca. 330 €/m^3) oder – wie dies bspw. Versicherungen tun – über den sog. „Goldmarktwert 1914“.
Anhand des sog. „Baupreisindizes“, der vom Statistischen Bundesamt ermittelt wird, kann man dann den jeweiligen aktuellen Gebäudewert berechnen. Dieser gibt den jeweiligen Neubauwert an, zu dem ein Gebäude versichert ist.
Bspw. berechnet man den Neubauwert eines Hauses mit dem Goldmarkwert 1914 in Höhe von 20.000 Mark wie folgt: Man multipliziert 20.000 mit dem gültigen Baupreisindex und erhält den Gebäudewert in Euro. Im Jahr 2000 betrug dieser Index 10,3 im Jahr 2015 war dies 13,1. Das Haus hatte also im Jahr 2000 einen versicherten Neubauwert in Höhe von 20.000 · 10,3 € = 206.000 €, im Jahr 2015 dagegen – wegen der gestiegenen Kosten – 20.000 · 13,1 € = 262.000 €.

Der sog. „**Goldmarkwert 1914**“ ist ein fiktiver Wert. Man hat sich darauf geeinigt, den Wert eines Gebäudes dadurch anzugeben, wie teuer die Erstellung des Gebäudes im Jahre 1914 in Goldmark gewesen wäre.

Um den „Goldmarkwert 1914“ zu erhalten, multipliziert man die Kubikmeterzahl des umbauten Raums mit einer Bewertungszahl, die sich nach der Ausführung und Ausstattung des Gebäudes richtet.
Bspw. hat ein Gebäude mit 500 m^3 umbautem Raum und einer mittleren Ausführung / Ausstattung (Bewertungszahl 30) einen „Goldmarkwert 1914“ von 500 · 30 Mark = 15.000 Mark. Dies entspricht einem aktuellen Gebäudewert von 15.000 · 13,1 € = 196.500 €.

Bei einer sehr einfachen Ausstattung liegt diese Bewertungszahl bei 20, bei sehr guter, gehobener Ausführung und Ausstattung bei 45.

☞ Berechne den „Goldmarkwert 1914“ und anhand beider Varianten den aktuellen Neubauwert des Gebäudes.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 15.02.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 12**	**Gebäudesanierungskosten**

Kompetenz:
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen, Pyramiden und Zylindern und daraus zusammengesetzten Körpern bestimmen.**

Mathematik
M4.12

Lösung

Aufgabe 1

a) Volumen:

$V = 15\text{ m} \cdot 19\text{ m} \cdot 21\text{ m} + (10\text{ m} + 15\text{ m}) : 2 \cdot 22\text{ m} \cdot 13\text{ m} +$
$\frac{1}{3} \cdot 15\text{ m} \cdot 10\text{ m} \cdot 11\text{ m}$
$= \mathbf{7275\text{ m}^3}$

Turmdachfläche:

$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15\text{ m} \cdot h_F + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10\text{ m} \cdot h_S$
$= 15\text{ m} \cdot 12{,}1\text{ m} + 10\text{ m} \cdot 13{,}3\text{ m} = \mathbf{314{,}5\text{ m}^2}$

mit Dreieckshöhe Front

$h_F = \sqrt{(11\text{ m})^2 + (5\text{ m})^2} = \sqrt{146}\text{ m} \approx 12{,}1\text{ m}$

und Dreieckshöhe Seite

$h_S = \sqrt{(11\text{ m})^2 + (7{,}5\text{ m})^2} = \sqrt{177{,}25}\text{ m} \approx 13{,}3\text{ m}$

Flachdachfläche:

$A = (10\text{ m} + 15\text{ m}) : 2 \cdot 22\text{ m} = \mathbf{275\text{ m}^2}$

Fassadenfläche:

$A = 2 \cdot 21\text{ m} \cdot 15\text{ m} + 21\text{ m} \cdot 10\text{ m} + (21\text{ m} - 13\text{ m}) \cdot 10\text{ m} + 22\text{ m} \cdot 13\text{ m} +$
$10\text{ m} \cdot 13\text{ m} + 5\text{ m} \cdot 13\text{ m} + 22{,}6\text{ m} \cdot 13\text{ m}$
$= \mathbf{1694{,}8\text{ m}^2}$

mit Kantenlänge $k = \sqrt{(22\text{ m})^2 + (5\text{ m})^2} = \sqrt{509}\text{ m} \approx 22{,}6\text{ m}$

b) Fassade: $1694{,}8 \cdot 60\text{ €} = 101.688\text{ €}$
Flachdach: $275 \cdot 100\text{ €} = 27.500\text{ €}$
Turmdach: $314{,}5 \cdot 80\text{ €} = 25.160\text{ €}$
Gesamtkosten: **ca. 154.500 €**

Aufgabe 2

Neubauwert:
$7275\text{ m}^3 \cdot 330\text{ €/m}^3 \approx$ **2.400.000 €**

Goldmarkwert 1914 (mit Bewertungszahl 25):
$7275\text{ m}^3 \cdot 25\text{ Mark/m}^3 =$ **181.875 Mark**
Versicherungsneuwert (mit Goldmarkwert 1914 und Baupreisindex 13,1):
181.875 Mark ·13,1 €/Mark ≈ **2.380.000 €**

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 15.02.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel
4 Messen	**LFS 12**	**Werbeagentur: Glühbirnenverpackung**

Kompetenz
- **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen, Pyramiden und Zylindern und daraus zusammengesetzten Körpern bestimmen.**

Mathematik
M4.12

Lernprojekt

Werbeagentur: Entwicklung einer Verpackung für Glühbirnen

Bezug zu Kompetenzen

M5.08

Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.

M4.10

Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.

M4.11

Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.

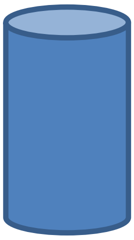
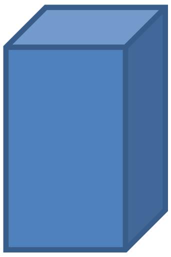
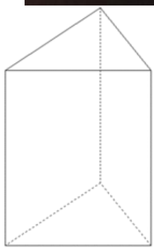
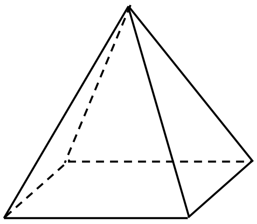
M4.12

Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen, Pyramiden und Zylindern und daraus zusammengesetzten Körpern bestimmen.

Entwicklung einer Verpackung für Glühbirnen

Für die Einführung ihrer neuen, besonders energiesparenden Glühbirne will die Firma „Leuchtmax“ als Blickfang besondere Verpackungen herstellen.
Folgende Formen oder Kombinationen der Formen werden von einer Werbeagentur vorgeschlagen: Zylinder, Prismen und Pyramiden.

Es gibt viele verschiedene Glühbirnenformen. Wähle für das Projekt eine Glühbirne, die du zuhause hast.

Bei der letzten Sitzung der Werbeabteilung mit der Geschäftsführung wurden verschiedene Kriterien festgelegt, nach denen untersucht werden soll, welche Verpackung gewählt werden soll:

- Attraktivität und ansprechendes Design
- Erstellung von Prototypen für möglichst passgenaue Verpackungen
- Benötigtes Material
- Kosten
- Möglichkeiten, die Verpackungen in großen Verpackungen an die Groß- und Einzelhändler zu liefern

Ein **Prototyp** ist ein Entwurfsmodell das dem Endprodukt sehr ähnlich ist. Es kann zur Präsentation einer Idee für ein Produkt dienen.

An eure Werbefirma geht der Auftrag, anhand der genannten Kriterien die Vor- und Nachteile der verschiedenen Verpackungen abzuwägen und in einer Präsentation eine Empfehlung an die Firma abzugeben.

☞ Entwickle zwei verschiedene Verpackungen für eine selbst gewählte Glühbirne.

☞ Dokumentiere deine Entwicklungsphase. Zeige dabei auch verworfene Ideen und erkläre, warum du diese Verpackungen der Firma nicht vorschlagen willst.

☞ Schreibe Gründe auf, die für die von dir entwickelten Verpackungen sprechen, damit du die Firma von deinen Verpackungen überzeugen kannst.

Abschluss des Projekts:
Reflektiere deine Arbeit während des Projekts:

- Was fiel mir leicht? Was habe ich gut gekonnt?
- Wo habe ich gut gearbeitet, wo schlecht?
- Wie kann ich mein Vorgehen verbessern?

Bei Gruppenarbeit:

- Wie konnte ich mit anderen zusammenarbeiten?
- Gab es Konflikte? Wie haben wir sie gelöst?
- Wie können wir unsere Zusammenarbeit verbessern?

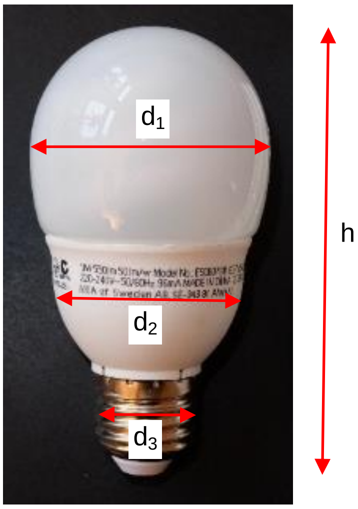
Autor: Mathias Nimmrichter
Datum: 15.01.2016

Kompetenzbereich	Lernfortschritt	Materialien/Titel	
4 Messen	**LFS 12**	**Werbeagentur: Glühbirnenverpackung**	**Mathematik M4.12**
Kompetenz: - **Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen, Pyramiden und Zylindern und daraus zusammengesetzten Körpern bestimmen.**			**Lösung**

Exemplarische Lösung

Hier wird ein mögliches Vorgehen gezeigt. Es gibt viele weitere Möglichkeiten. Frage deine Lehrerin oder deinen Lehrer, wenn du unsicher bist, oder präsentiere dein Projekt, um eine Rückmeldung zu bekommen.

1. Wichtige Maße durch Messen ermitteln



$h = 11{,}7$ cm
$u_1 = 19{,}2$ cm $\rightarrow d_1 \approx 6{,}1$ cm
$u_2 = 15{,}2$ cm $\rightarrow d_2 \approx 4{,}8$ cm
$u_3 = 8{,}3$ cm $\rightarrow d_3 \approx 2{,}6$ cm
Umfang messen (z. B. mit Maßband oder Schnur) und
den Durchmesser mit $u = \pi \cdot d$ oder den Radius mit $u = 2 \cdot \pi \cdot r$ berechnen.

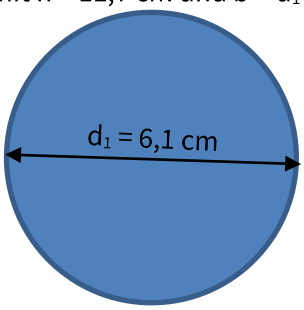
2. Entscheidung für eine Verpackung

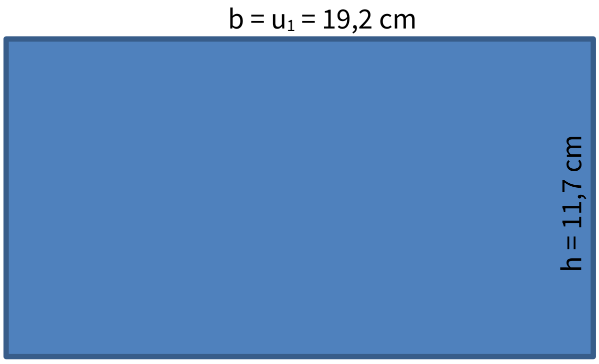
Wir wählen für die Musterlösung eine einfache Möglichkeit: einen Zylinder.

3. Skizze und Berechnung der Maße für die benötigten Flächen

Wir benötigen

- zwei Kreise mit $d_1 = 6{,}1$ cm
- ein Rechteck (als Zylindermantel) mit $h = 11{,}7$ cm und $b = u_1 = 19{,}2$ cm

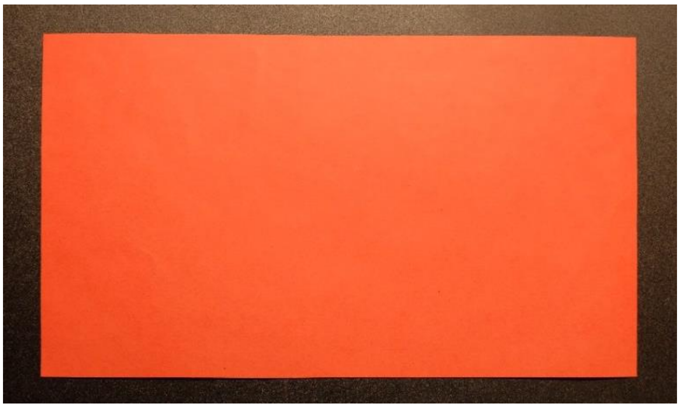
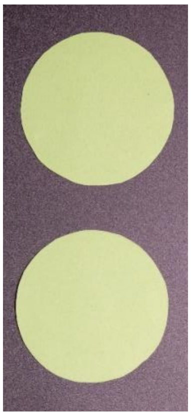




4. Herstellen der Einzelflächen und der Verpackung (hier verkleinert dargestellt)

Das Rechteck ist um 1,8 cm breiter, damit der Mantel gut geklebt werden kann.

Damit die Verpackung noch ansprechender wird kannst du sie auch verzieren und beschriften.

5. Berechnung des Materialbedarfs

a) Oberfläche des Zylinders:

$A = 2 \cdot G + M$

$= 2 \cdot \pi \cdot r^2 + b \cdot h$

$= 2 \cdot \pi \cdot 3{,}05^2\ cm^2 + 21\ cm \cdot 11{,}7\ cm \approx 58{,}45\ cm^2 + 245{,}7\ cm^2 = 304{,}15\ cm^2$

b) Für die Produktion muss man auch den Verschnitt mitrechnen, deshalb muss man beim Materialbedarf für die Kreise jeweils der Flächeninhalt eines Quadrats berechnen. Der tatsächliche Materialbedarf ist also:
$A = 2 \cdot d_1^2 + M = 320{,}12\ cm^2$
Bedacht werden müssen nun auch die Maße der Papprollen aus denen die Flächen ausgeschnitten werden.

6. Größe der Versandkartons berechnen

Eine Verpackung braucht in einem Versandkarton die Maße: 6,2 cm x 6,2 cm x 11,7 cm (Außenmaße).
Ein Versandkarton für 150 Glühbirnen hat dann eine Größe von 62 cm x 31 cm x 35,1 cm (Innenmaße).
Das Volumen des Karton beträgt $V = 67462{,}2\ cm^3$.

7. Argumente für die Verpackung:

- Man benötigt wenig Material – weniger als bei einer herkömmlichen Verpackung (Quader).
- Die Verpackungen lassen sich gut in größeren quaderförmigen Paketen verpacken.
- Die Herstellung ist einfach, weil es eine recht gängige Verpackung ist.
- Die Herstellung ist einfach, weil die Verpackung nur aus zwei verschiedenen Flächen besteht. Ein zusammengesetzter Körper wäre komplizierter.
- Es ist eine eher ausgefallene Verpackung für Glühbirnen.
- Die Form lässt sich auch gut im Regal eines Kaufhauses stapeln.

8. Argumente gegen die Verpackung:

Die Form ist nicht so ausgefallen, dass sie gleich ins Auge sticht. Damit sie auffälliger wird, müsste sie gut bedruckt sein oder eine besondere Farbe haben.

Autor: Mathias Nimmrichter
Datum: 15.01.2016

Thema

Körperberechnung an Prismen, Zylindern und Pyramiden

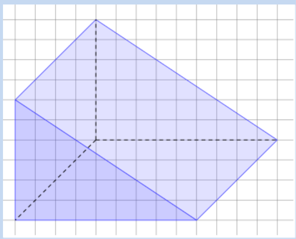
Mathematik 7-10

Kompetenzen

- 5.08: Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.
- 4.10: Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.
- 4.11: Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.
- 4.12: Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen, Pyramiden und Zylindern und daraus zusammengesetzten Körpern bestimmen.

Lernnachweis

Rund, eckig, spitz – Körperberechnung an Prismen, Zylindern und Pyramiden



Aufgabe 1

Gegeben sind die folgenden geometrischen Körper mit den angegebenen Maßen:

Geometrischer Körper	Maße	Höhe
Quader	Grundkantenlängen a = 4 cm, b = 3 cm	2 cm
Gleichschenkliges Dreieckprisma	Basislänge c = 4 cm, Dreieckhöhe h = 5 cm	6 cm
Zylinder	Durchmesser d = 5 cm	7 cm
Quadratische Pyramide	Grundkantenlänge a = 4 cm	6 cm

☞ Zeichne auf kariertes Papier zu den Körpern jeweils

a) das Schrägbild,

b) Grund- und Aufriss.

Aufgabe 2

☞ Zeichne zu den Körpern aus Aufgabe 1 jeweils ein Netz.

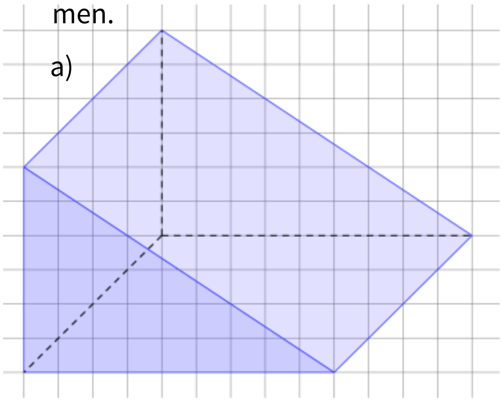
Aufgabe 3

☞ Berechne zu den Körpern aus Aufgabe 1 jeweils a) das Volumen und b) den Oberflächeninhalt.

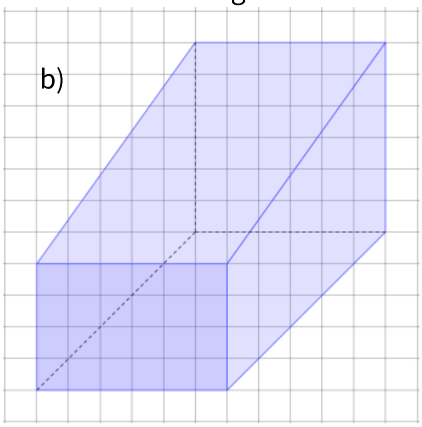
Aufgabe 4

☞ Berechne Oberflächeninhalt und Volumen der beiden abgebildeten Prismen.

a)



b)



c) Gesucht ist ein Prisma, dessen Seitenflächen links und rechts identisch zu dem aus Teilaufgabe b) sind. Es soll ein Volumen von 81,25 cm^3 haben.

☞ Berechne die benötigte Breite des Prismas.

Aufgabe 5

Die abgebildete Druckwasserleitung hat einen Innendurchmesser von 3 m und enthält 20.000 m^3 Wasser.

☞ Berechne die Länge der Leitung.

Aufgabe 6

Die größere der beiden abgebildeten quadratischen Pyramiden hat eine Grundkantenlänge von 160 m und eine Seitenhöhe von 130 m.

a) Die Pyramide ist im Wesentlichen aus etwa würfelförmigen Steinquadern mit einer Kantenlänge von 80 cm erbaut.

☞ Berechne, wie viele Steinquader etwa verbaut wurden.

b) Die Grundkante der kleineren Pyramide ist nur 140 m lang. Ihre Oberfläche beträgt 32.000 m^2.

☞ Berechne die Höhe der kleineren Pyramide.

Aufgabe 7

Beim Eindünsten werden Obst und andere Lebensmittel durch Erhitzen unter Luftabschluss konserviert.

Die abgebildeten Eindünstgläser sind 17 cm hoch und haben einen Durchmesser von 10,5 cm.

a) Wie viel Liter eingedünstete Kirschen befinden sich in dem rechten Glas?

☞ Berechne das Volumen.

b) Es gibt auch kleinere Eindünstgläser mit demselben Durchmesser und nur 12 cm Höhe sowie mit 9 cm Durchmesser und 15 cm Höhe.

☞ Berechne, in welches dieser kleineren Gläser mehr hineinpasst.

☞ Berechne, wie hoch ein Glas mit 9 cm Durchmesser sein müsste, damit dieselbe Füllmenge hineinpassen würde wie in das große Glas aus Teilaufgabe a).

c) 7,5 l Kirschen sollen in Gläsern dieser drei Sorten eingedünstet werden. Dabei sollen möglichst wenige Gläser verwendet werden und zugleich möglichst wenig Luft in den Gläsern eingeschlossen werden.

☞ Berechne, welche Gläser gewählt werden sollten.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 30.11.2015

Thema

Körperberechnung an Prismen, Zylindern und Pyramiden

Mathematik 7-10

Kompetenzen

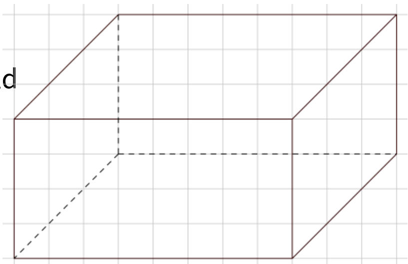
- 5.08: Ich kann Netze Körpern zuordnen und Netze, Modelle und Schrägbilder von Prismen, Pyramiden und Zylindern anfertigen.
- 4.10: Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern berechnen.
- 4.11: Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen.
- 4.12: Ich kann Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen, Pyramiden und Zylindern und daraus zusammengesetzten Körpern bestimmen.

Lösung

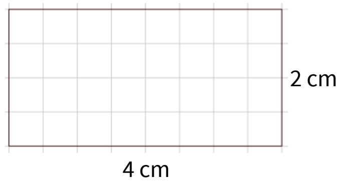
Aufgabe 1

Quader

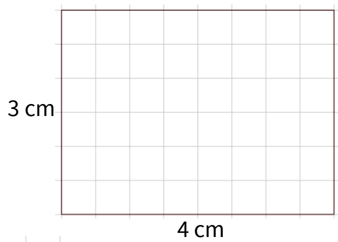
Schrägbild



Aufriss

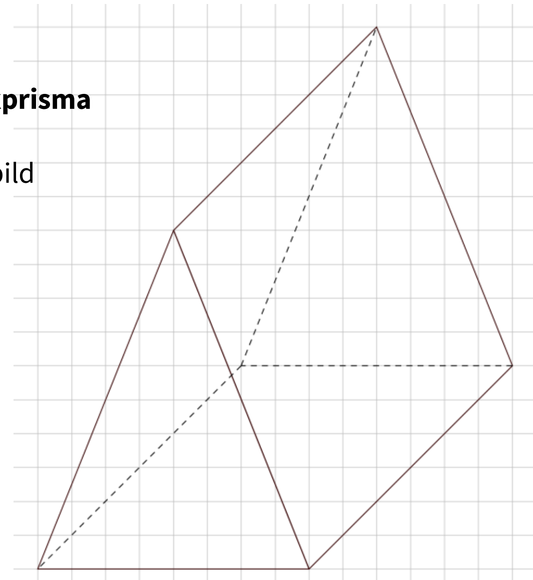


Grundriss

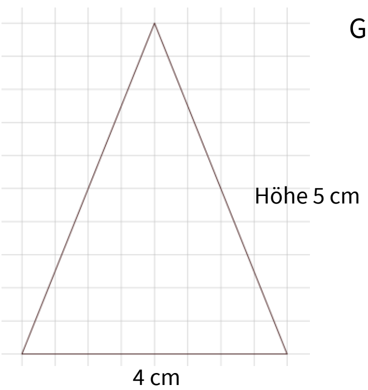


Dreieckprisma

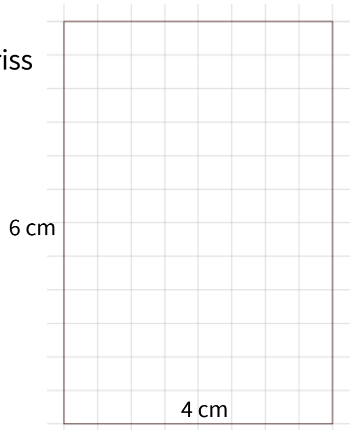
Schrägbild



Aufriss

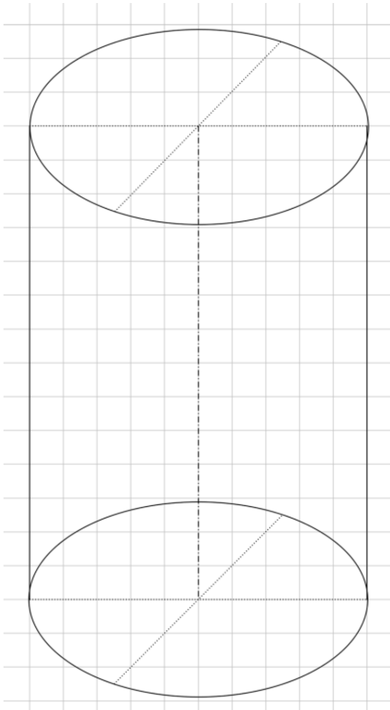


Grundriss

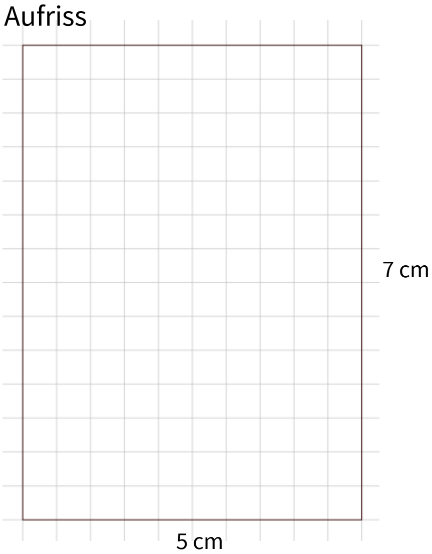


Zylinder

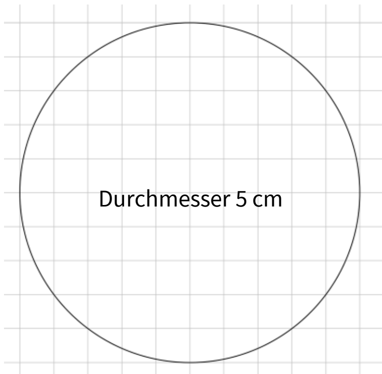
Schrägbild



Aufriss

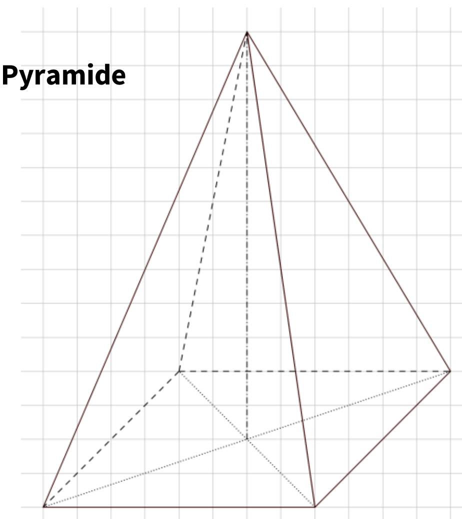


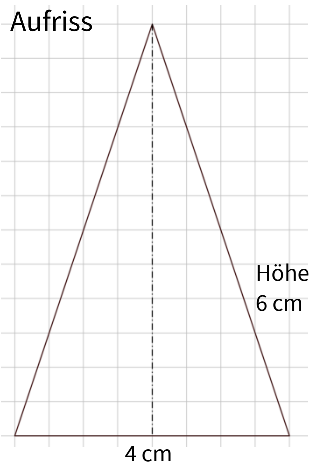
Grundriss



Quadratische Pyramide

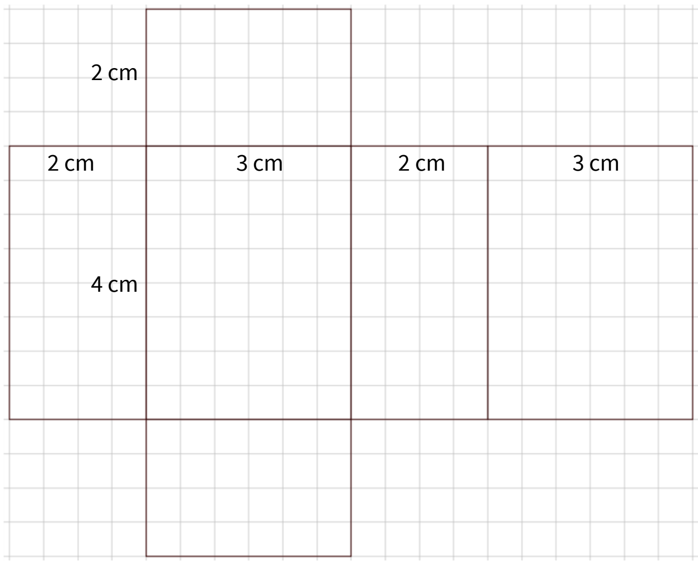
Schrägbild



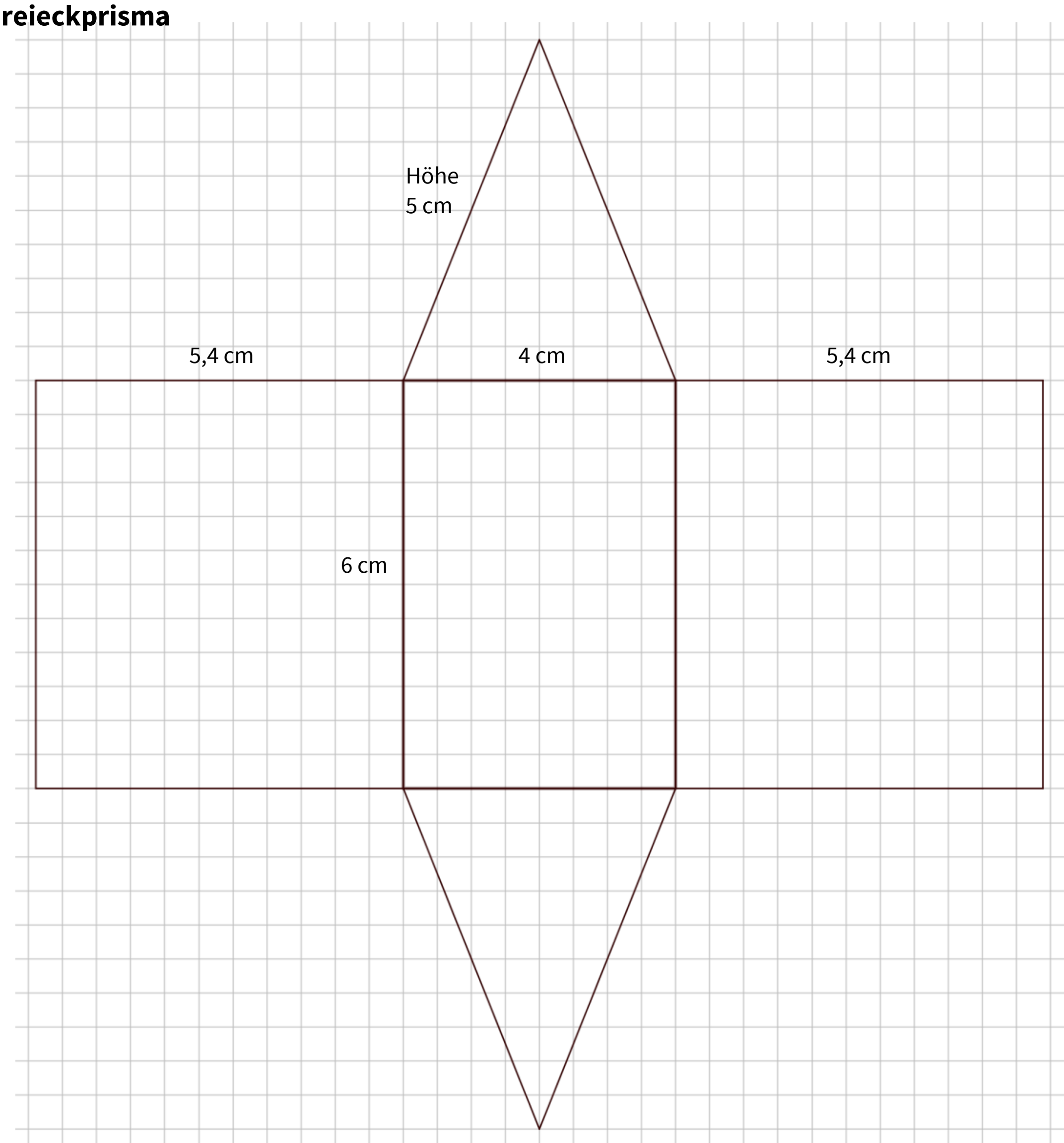


Aufgabe 2

Quader

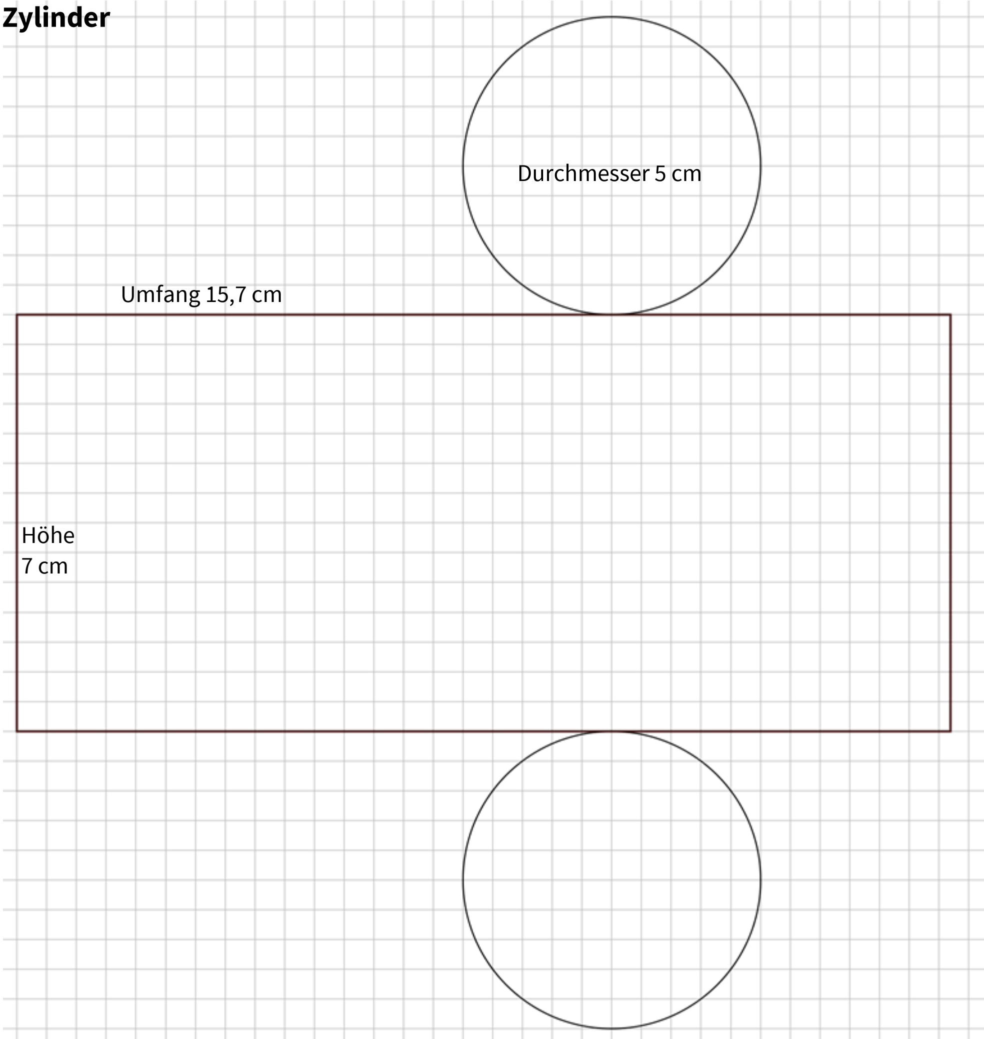


Dreieckprisma

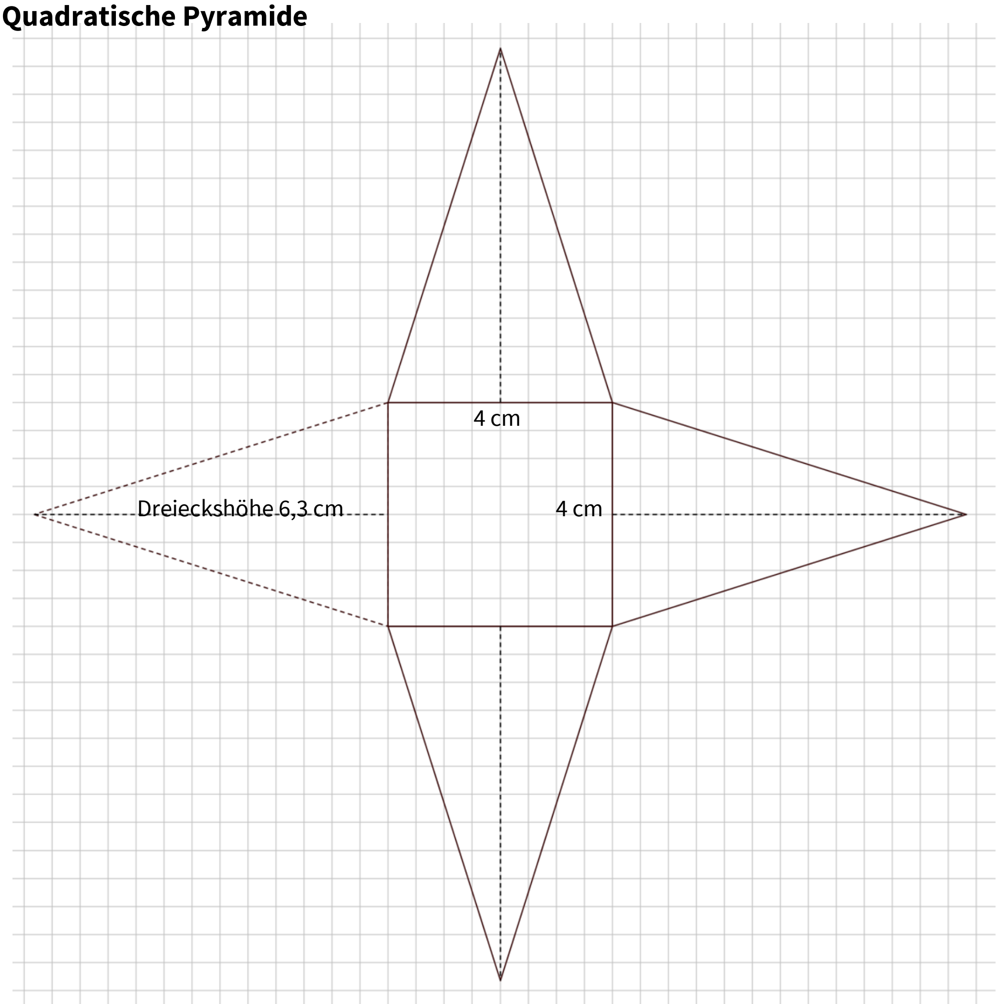


Die beiden folgenden Abbildungen wurden maßstabsgetreu verkleinert!

Zylinder



Quadratische Pyramide



Aufgabe 3

a) $V_{Quader} = 3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = \mathbf{24\text{ cm}^3}$
$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = \mathbf{60\text{ cm}^3}$
$V_{Zylinder} = \pi \cdot (2{,}5\text{ cm})^2 \cdot 7\text{ cm} \approx \mathbf{137{,}44\text{ cm}^3}$
$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = \mathbf{24\text{ cm}^3}$

b) $O_{Quader} = 2 \cdot 3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} + 2 \cdot 2\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} + 2 \cdot 2\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = \mathbf{52\text{ cm}^2}$
$O_{Prisma} \approx 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} + 4\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} + 2 \cdot 5{,}4\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = \mathbf{108{,}8\text{ cm}^2}$
mit $s_\Delta = \sqrt{(2\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2} = \sqrt{29}\text{ cm} \approx 5{,}4\text{ cm}$
$O_{Zylinder} = 2 \cdot \pi \cdot (2{,}5\text{ cm})^2 + \pi \cdot 5\text{cm} \cdot 7\text{ cm} \approx \mathbf{149{,}23\text{ cm}^2}$
$O_{Pyramide} \approx 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot 6{,}3\text{ cm} + 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = \mathbf{66{,}4\text{ cm}^2}$
mit $h_\Delta = \sqrt{(2\text{ cm})^2 + (6\text{ cm})^2} = \sqrt{40}\text{ cm} \approx 6{,}3\text{ cm}$

Aufgabe 4

a) Volumen:
Grundfläche des rechtwinkligen Dreiecks: $G = \frac{1}{2} \cdot 4{,}5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 6{,}75\text{ cm}^2$
$V = G \cdot h = 6{,}75\text{ cm}^2 \cdot 4\text{ cm} = \mathbf{27\text{ cm}^3}$
Oberfläche:
$O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4{,}5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} + (4{,}5\text{ cm} + 3\text{ cm} + 5{,}4\text{ cm}) \cdot 4\text{ cm} = \mathbf{65{,}1\text{ cm}^2}$
mit $h_\Delta = \sqrt{(3\text{ cm})^2 + (4{,}5\text{ cm})^2} = \sqrt{29{,}25}\text{ cm} \approx 5{,}4\text{ cm}$

b) Volumen:
Grundfläche des Trapezes: $G = (2\text{ cm} + 3\text{ cm}) : 2 \cdot 5\text{ cm} = 12{,}5\text{ cm}^2$
$V = G \cdot h = 12{,}5\text{ cm}^2 \cdot 3\text{ cm} = \mathbf{37{,}5\ cm^3}$
Oberfläche:
$O = 2 \cdot 12{,}5\text{ cm}^2 + (2\text{ cm} + 5\text{ cm} + 3\text{ cm} + 5{,}1\text{ cm}) \cdot 3\text{ cm} = \mathbf{70{,}3\ cm^2}$
mit Seitenkante $s = \sqrt{(5\text{ cm})^2 + (3\text{ cm} - 2\text{ cm})^2} = \sqrt{26}\text{ cm} \approx 5{,}1\text{ cm}$

c) Aus $V = G \cdot h = 12{,}5\text{ cm}^2 \cdot h = 81{,}25\text{ cm}^3$ folgt
$\mathbf{h} = 81{,}25\text{ cm}^3 : 12{,}5\text{ cm}^2 = \mathbf{6{,}5\ cm}$.

Aufgabe 5

Aus $V = \pi \cdot r^2 \cdot l = \pi \cdot (1{,}5\text{ m})^2 \cdot l = 20\,000\text{m}^3$ folgt
$\mathbf{l} = 20\,000\text{ m}^3 : (\pi \cdot 2{,}25\text{ m}^2) \approx \mathbf{2829{,}42\ m}$.

Aufgabe 6

a) Volumen eines Steinquaders: $V_{St} = (0{,}8\text{ m})^3 = 0{,}512\text{ m}^3$
Volumen der Pyramide: $V_{Pyr} = \frac{1}{3}(160\text{ m})^2 \cdot h$
Höhe der Pyramide:
$h = \sqrt{(130\text{ m})^2 - (160\text{ m} : 2)^2} = \sqrt{10500}\text{ m} \approx 102{,}47\text{ m}$
$V_{Pyr} = \frac{1}{3}(160\text{ m})^2 \cdot 102{,}47\text{ m} \approx 874\,411\text{ m}^3$
Geschätzte Anzahl an Steinquadern: $V_{Pyr} : V_{St} = 874\,411 : 0{,}512 \approx 1\,707\,834$
Es wurden **ca. 1,7 Millionen solcher Steinquader** verbaut.

b) Seitenhöhe der Pyramide:
Wegen $O = 2 \cdot 140\text{ m} \cdot h_s = 32\,000\text{ m}^2$ ist $h_s = 32\,000\text{ m}^2 : 280\text{ m} \approx 114{,}29\text{ m}$.
Höhe der Pyramide:
$\mathbf{h} = \sqrt{(114{,}29)^2 - (140\text{ m} : 2)^2} \approx \mathbf{90{,}29\ m}$

Aufgabe 7

a) Volumen eines Eindünstglases
$V = \pi \cdot (10{,}5\text{ cm} : 2)^2 \cdot 17\text{ cm} \approx \mathbf{1472\ cm^3}$

b) Volumen des höheren Eindünstglases
$V = \pi \cdot (9\text{ cm} : 2)^2 \cdot 15\text{ cm} \approx \mathbf{954\ cm^3}$
Volumen des breiteren Eindünstglases
$V = \pi \cdot (10{,}5\text{ cm} : 2)^2 \cdot 12\text{ cm} \approx \mathbf{1039\ cm^3}$
In das breitere Eindünstglas passt mehr hinein.
Höhe des schmaleren Eindünstglases bei selbem Volumen:
Wegen $V = \pi \cdot (9\text{ cm} : 2)^2 \cdot h = 1472\text{ cm}^3$
ist $h \approx 1472\text{ cm}^3 : 63{,}62\text{ cm}^2 \approx \mathbf{23{,}1\ cm}$

c) Wegen $7{,}5 : 1{,}472 \approx 5{,}1$ benötigt man 6 Gläser.
Ideal wären **3 Gläser zu 1,472 l** und **3 Gläser zu 1,039 l** – so bleiben nur 0,033 l Luft in den Gläsern.

Autor: Andreas von Scholz
Datum: 30.11.2015

Landesinstitut für Schulentwicklung
Heilbronner Straße 172
70197 Stuttgart

www.ls-bw.de