MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT
BADEN-WÜRTTEMBERG

MUSTER 2 FÜR DIE ABITURPRÜFUNG AM BERUFLICHEN GYMNASIUM AB DEM SCHULJAHR 2016/2017

Hauptprüfung	AUFGABEN FÜR DAS FACH
	Mathematik (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

Arbeitszeit	270 Minuten
Hilfsmittel	**Teil 1:** Keine Hilfsmittel zugelassen. **Teil 2, Teil 3 und Teil 4:** Merkhilfe sowie eingeführter wissenschaftlicher Taschenrechner sind zugelassen. Die zugelassenen Hilfsmittel für die nachstehenden Aufgaben bekommt der Schüler genau dann, wenn er den ersten Teil unwiderruflich abgegeben hat.
Stoffgebiet	**Teil 1:** Analysis, Stochastik und Vektorgeometrie bzw. Matrizen (4 Aufgaben) — S. 2 - 5 **Teil 2:** Analysis (1 Aufgabe) — S. 6 Anwendungsorientierte Analysis (3 Aufgaben) — S. 7 - 9 **Teil 3:** Stochastik (2 Aufgaben) — S. 10 - 11 **Teil 4:** Lineare Algebra: Vektorgeometrie (1 Aufgabe) — S. 12 Lineare Algebra: Matrizen (1 Aufgabe) — S. 13
Bemerkungen	In Teil 1 wählt die Fachlehrkraft das unterrichtete Wahlgebiet aus. Es sind alle 3 vorgelegten Aufgaben zu bearbeiten. (Pflichtteile: Analysis und Stochastik) In Teil 2 ist die Aufgabe 1 zu bearbeiten. Aus den Aufgaben 2, 3 und 4 wählt die Schülerin/der Schüler **eine** Aufgabe aus und bearbeitet sie. Aus Teil 3 wählt die Schülerin/der Schüler **eine** Aufgabe aus und bearbeitet sie. In Teil 4 wählt die Fachlehrkraft - je nach unterrichtetem Wahlgebiet - eine Aufgabe aus. Die vorgelegte Aufgabe ist zu bearbeiten. Sie sind verpflichtet, jeden Aufgabensatz umgehend auf seine Vollständigkeit zu überprüfen und fehlende Seiten der Aufsicht führenden Lehrkraft anzuzeigen. Jede Aufgabe ist mit einem neuen Blatt zu beginnen. Bei Verstößen gegen die angemessene Darstellungsform kann ein Punkteabzug erfolgen.

Punkte

1 Analysis

1.1 Die Funktion f ist gegeben durch 3

$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f im Schnittpunkt mit der y-Achse.

1.2 Erläutern Sie eine Vorgehensweise zum näherungsweisen Lösen der Gleichung 3

$$x^3 = x + 1.$$

1.3 Das Schaubild einer Polynomfunktion 3. Grades verläuft durch den Ursprung und hat in P(–2 | 4) einen Wendepunkt. Die Wendetangente schneidet die x-Achse in Q(4 | 0). 4

Tina notiert folgende Bedingungen zur Bestimmung des Funktionsterms:

- $p(0) = 0$
- $p''(-2) = 0$
- $p(-2) = 4$
- $p(4) = 0$

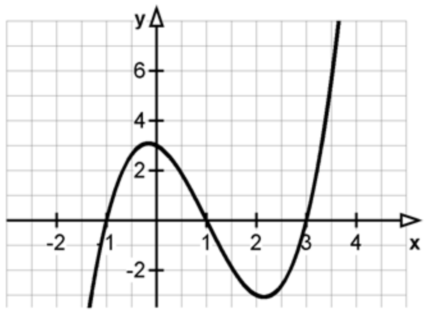
Begründen Sie, dass Tina die Informationen im Aufgabentext nicht richtig übersetzt hat.

1.4 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion g. 5
Ordnen Sie die folgenden Integralwerte der Größe nach. Begründen Sie.

(A) $\int_0^3 g(x)\,dx$

(B) $\int_{-1}^1 g(x)\,dx$

(C) $\int_{-1}^{3{,}5} g(x)\,dx$



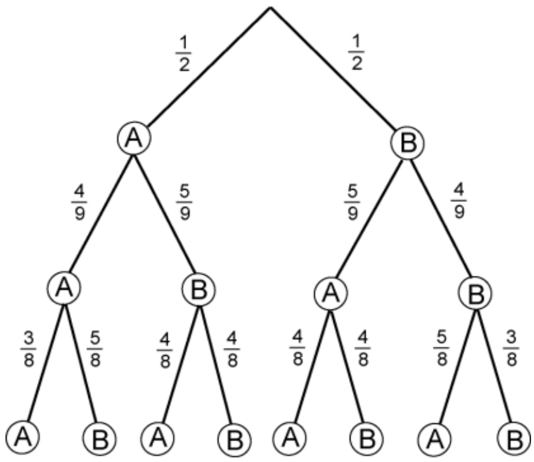
15

Punkte

2 Stochastik

2.1 Beschreiben Sie ein mögliches Zufallsexperiment, das zum nebenstehenden Baumdiagramm passt. 4

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: „Mindestens einmal tritt A ein.“



2.2 Eine ideale Münze wird 100 Mal geworfen. Begründen Sie, ob die nachfolgende Aussage wahr oder falsch ist: 3

Die Wahrscheinlichkeit für genau einmal Kopf ist kleiner als die für genau 98 Mal Kopf.

7

Punkte

3 Vektorgeometrie

3.1 Gegeben ist die Ebene E durch 4

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ u, v \in \mathrm{IR}.$$

Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden an,

(A) die in der Ebene E liegt,
(B) die keine gemeinsamen Punkte mit E hat.

3.2 Zeichnen Sie einen Würfel mit der Kantenlänge 3 LE in ein räumliches Koordinatensystem. Markieren Sie eine Kante und geben Sie eine Gleichung der Geraden an, auf der diese Kante liegt. 4

8

Punkte

4 Matrizen

4.1 Anna, Biggi und Chris schicken sich öfter SMS-Nachrichten. In der letzten Woche schrieb Anna an Biggi 58 und an Chris 42 SMS, Biggi schrieb 62 an Anna und 38 an Chris. Chris schrieb an Anna und Biggi jeweils 50 SMS. 4

Stellen Sie die SMS-Kontakte graphisch dar.
Begründen Sie, dass in der Hauptdiagonale der Matrix, die die Häufigkeit der SMS-Kontakte wiedergibt, stets 0 steht.

4.2 A, B und X sind 3x3-Matrizen. Bei welchen der folgenden Terme kann X ausgeklammert werden? 4

(1) $A \cdot X + X$
(2) $X \cdot A + B \cdot X$

In manchen Fällen kann man die Gleichung $A \cdot X + 2X = B$ nicht nach X umstellen. Geben Sie dafür eine mögliche Matrix A an.

8

Musterabitur 2	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
	Teil 2 (mit Hilfsmittel)	Aufgabe 1

Punkte

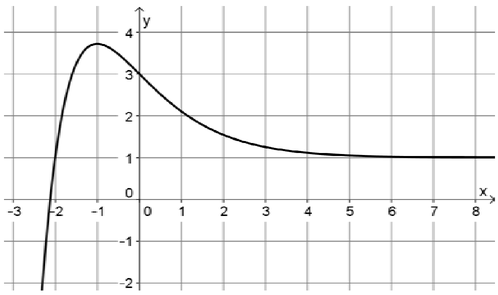
1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{2}(x-1)) + 1;\ x \in IR$.

Das Schaubild von f ist K.

1.1.1 Wie entsteht das Schaubild K aus der Sinuskurve mit y = sin(x)? Skizzieren Sie K. 7

1.1.2 Geben Sie die Koordinaten von zwei benachbarten Wendepunkten von K an. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ursprungsgeraden, die parallel ist zur Normalen an K in einem dieser Wendepunkte. 6

1.2 Das folgende Schaubild K_g gehört zu einer Funktion g mit $g(x) = (x+a)\cdot e^{-x} + b$.



1.2.1 G ist eine Stammfunktion von g. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie. 4

1. Das Schaubild von G besitzt eine schiefe Asymptote, die parallel zur 1. Winkelhalbierenden ist.
2. Das Schaubild von G besitzt an der Stelle x = – 1 einen Hochpunkt.

1.2.2 Bestimmen Sie a und b. 3

20

Punkte

2 Die von einem Röntgengerät ausgehende Strahlenbelastung kann durch eine Abschirmung reduziert werden.

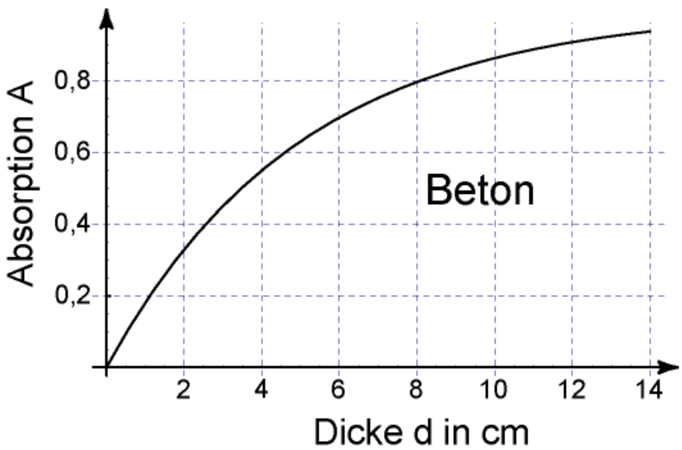
Die Absorption A gibt an, welcher Anteil der Strahlung von der Abschirmung zurückgehalten wird. Zum Beispiel bedeutet A = 0,9 , dass 90 % der Strahlung absorbiert werden.

Der Zusammenhang zwischen der Absorption und der Dicke d (in cm) des abschirmenden Materials wird näherungsweise beschrieben durch

$$A(d) = 1 - e^{-k \cdot d}\,.$$

Hierbei ist k $\left(\text{in } \frac{1}{\text{cm}}\right)$ eine Materialkonstante.

2.1 Für Abschirmungen durch Betonwände wurde der im folgenden Bild dargestellte Zusammenhang ermittelt: 6



Bestimmen Sie die Materialkonstante k für Beton mit Hilfe dieses Diagramms.
Wie dick muss eine Betonwand sein, damit 99 % der Strahlung absorbiert werden?

2.2 Für Aluminium hat k den Wert 0,15 und für Blei hat k den Wert 1,62. 4

Zur Abschirmung der von einem Röntgengerät ausgehenden Strahlung wird eine 51 kg schwere Bleiplatte der Dicke 5 cm verwendet.
Eine Platte aus Aluminium mit den gleichen Abmessungen wiegt 12,13 kg.
Der Kilogrammpreis für Blei liegt bei ca. 1,60 €, der für Aluminium bei ca. 1,50 €.

Zeigen Sie, dass eine ebenso gut absorbierende Abschirmung aus Aluminium wesentlich teurer ist.

10

Punkte

3 Bei einer „Holländischen Auktion“ sinkt der Preis des Verkaufsobjekts mit zunehmender Angebotsdauer.
Ein Händler möchte diese Art der Auktion testen. Er bietet hierzu über ein Internetauktionshaus eine Holzgiraffe zum Verkauf an und wählt die folgende Strategie:

- Der Startpreis wird auf das doppelte des Preises, der gerade noch kostendeckend ist, festgelegt.
- Der Preis wird an jedem Auktionstag um 4 %, bezogen auf den Preis des Vortags, gesenkt.

Die Gesamtkosten (Auktionsgebühren und Kosten für den Einkauf der Giraffe) betragen 30 Euro.

3.1 Der Händler möchte im Voraus den aktuellen Preis der Giraffe für jeden Auktionstag berechnen. Der Händler stellt hierzu einen Funktionterm für die Preisfunktion p auf: 6

$p(t) = 60 - 2{,}4 \cdot t$,

wobei $t \in \mathbb{N}$ die Zeit in Tagen nach Beginn der Auktion ist.

Ein Freund des Händlers behauptet, dass der Funktionsterm wie folgt lauten muss:

$p(t) = 60 \cdot e^{\ln(0{,}96) \cdot t}$.

Begründen Sie, mit welchem der beiden Funktionsterme der Auktionspreis richtig berechnet wird.

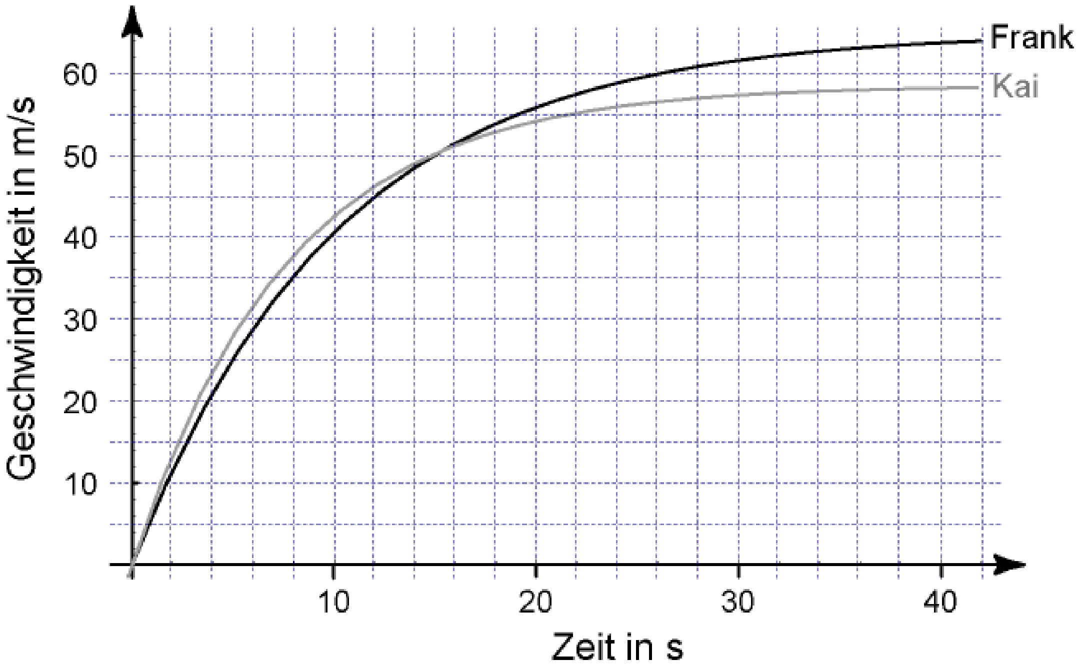
Nach wieviel Auktionstagen muss der Händler die Giraffe spätestens verkauft haben, damit er mit dem Verkauf keinen Verlust erleidet?

3.2 Auf welchen Wert muss der Prozentsatz der täglichen Preisanpassung gesenkt werden, damit der Händler erst ab dem 50. Auktionstag Verlust macht? 4
Hinweis: Beginn der Auktion bei t = 0.

10

Punkte

4 Kai und Frank liefern sich mit ihren Sportwagen ein Rennen. Hierzu fahren Sie eine 2 km lange Rennstrecke. Der Geschwindigkeitsverlauf beider Fahrzeuge ist innerhalb der ersten 42 Sekunden in der Abbildung dargestellt:



4.1 Die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung. 4

Bestimmen Sie näherungsweise mithilfe der Abbildung:

(1) Die maximale Beschleunigung, die Kai erfährt.
(2) Den Zeitpunkt, zu dem Frank und Kai gleich stark beschleunigen.

4.2 Die Funktion v mit 6

$$v(t) = -65 \cdot e^{-0{,}098t} + 65 \; ; \; 0 \leq t \leq 42$$

gibt näherungsweise den in der Abbildung dargestellten Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und der Zeit t von Franks Wagen wieder.

Hierbei wird v(t) in Metern pro Sekunde ($\frac{m}{s}$) und t in s angegeben.

Die Geschwindigkeit ist die momentane Änderungsrate der zurückgelegten Wegstrecke.

Welche Wegstrecke hat Frank nach 40 Sekunden Fahrt zurückgelegt?

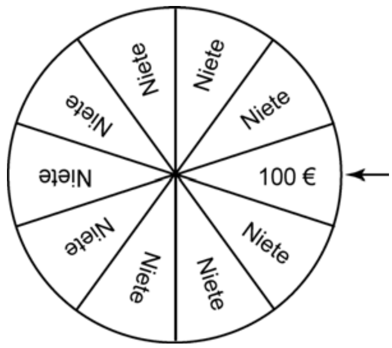
Kai hat nach 40 Sekunden 1941 m Wegstrecke zurückgelegt.

Begründen Sie, warum Frank sicher als Sieger aus dem Rennen hervorgeht.

10

Punkte

1 Ein Autohaus bietet seinen Besuchern bei einer Präsentation der neuen Modelle folgendes Glücksspiel an: Das rechts abgebildete Glücksrad, bestehend aus zehn gleich großen Sektoren, wird in Drehung versetzt. Bei Stillstand zeigt der Pfeil zufällig auf genau einen Sektor.



Ein Teilnehmer zahlt einen Einsatz und darf das Glücksrad drehen. Zeigt der Pfeil am Ende der Drehung auf den Sektor „100 €“, so erhält der Teilnehmer diesen Betrag. Ansonsten geht er leer aus. Der Teilnehmer darf so lange weiterspielen, bis er ein zweites Mal „100 €“ gewinnt oder aber ein zweites Mal leer ausgeht.

1.1 Zeichnen Sie ein Baumdiagramm zum beschriebenen Glücksspiel. 4

1.2 Welchen Einsatz muss das Autohaus von einem Teilnehmer verlangen, damit das Spiel fair ist? 4

1.3 Ein Besucher nimmt am Spiel teil und zählt zu den glücklichen Gewinnern. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war das Spiel nach drei Drehungen zu Ende? 3

1.4 Am Ende des Tages wurde das Spiel 180mal von den Besuchern gespielt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zehnmal 200 € gewonnen wurden? 4

15

.

Punkte

2 Eine Werkstattkette bietet vor der kalten Jahreszeit seinen Kunden die Angebote „Wintercheck“ sowie „Reifenwechsel“ an.
60 % aller Kunden nehmen das Angebot „Wintercheck“ an, 30 % nutzen die Möglichkeit des Reifenwechsels. 28 % aller Kunden nehmen keines der beiden Angebote wahr.

2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde zugleich beide Angebote annimmt. 5

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Kunde für genau eines dieser Angebote entscheidet?

2.2 Das Angebot „Wintercheck“ kostet 19 €, das Angebot „Reifenwechsel“ kostet 9 €. Damit sich die Angebote lohnen, muss die Werkstatt täglich insgesamt mindestens 800 Euro Umsatz mit beiden Angeboten machen. 4
Wieviel Kunden müssen die Werkstatt täglich im Mittel aufsuchen, damit sich die Angebote für die Werkstatt lohnen?

2.3 Eine Stichprobe hat ergeben, dass 85 von 1000 Winterchecks nicht ordnungsgemäß ausgeführt wurden. Mit p wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass ein Wintercheck nicht ordnungsgemäß ausgeführt wurde. 6
Geben Sie einen Schätzwert für p an. Ermitteln Sie ein Vertrauensintervall für p zum Konfidenzniveau 95 %.

15

Punkte

Lineare Algebra: Vektorgeometrie (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

1 Gegeben sind die Gerade g sowie die Ebene E durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in IR \quad \text{und} \quad E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

1.1 Bestimmen Sie den Abstand, den E zum Ursprung hat. 3

1.2 Zeigen Sie, dass sich die Gerade g und die Ebene E in einem Punkt schneiden. 6
Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes und berechnen Sie den Schnittwinkel.

1.3 Die Ebene F verläuft durch den Punkt A(–5|0|1) und ist orthogonal zur Geraden g. 6
Welche besondere Lage hat F im Koordinatensystem?

Begründen Sie, dass sich die beiden Ebenen E und F in einer Geraden schneiden.

15

Punkte

Lineare Algebra: Matrizen (AG; BTG, EG, SGG, WG)

1 Im April ist das Wetter am Bodensee äußerst wechselhaft. Erfahrungsgemäß folgt auf einen überwiegend regnerischen Tag (R) mit 10 % Wahrscheinlichkeit ein überwiegend sonniger Tag (S) und mit 30 % Wahrscheinlichkeit ein überwiegend trüber Tag (T). Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag wieder ein Sonnentag oder aber ein Regentag folgt, ist ebenfalls jeweils 30 %. Auf einen trüben Tag folgt mit 70 % Wahrscheinlichkeit ein Regentag, und mit 20 % Wahrscheinlichkeit bleibt es trübe.

1.1 Veranschaulichen Sie diese Informationen in einem Übergangsgraphen und ergänzen Sie die fehlenden Angaben. 4

1.2 Ein Online-Wetterdienst sagt für den 1. April 2015 für die Bodenseeregion voraus, dass es mit 30 % Wahrscheinlichkeit regnet. 5

Wie groß müssen die Wahrscheinlichkeiten für einen Sonnentag bzw. für einen trüben Tag am 1. April 2015 sein, damit die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Folgetag größer wird?

1.3 Es wird angenommen, dass sich die Übergangswahrscheinlichkeiten für die drei Wetterzustände R, S und T am Bodensee nicht ändern. Zeigen Sie, dass es dann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt, die auf Dauer stabil bleibt. 6

15